Wissenschaftliche Beilage

zum

Bericht des Königlichen Gymnasiums zu Tilsit.

Ostern 1903.

Mathematische Reifeprüfungsaufgaben

des

Königlichen Gymnasiums zu Tilsit

gestellt von

Professor G. A. Friedrich.

Tilsit 1903.
Druck von J. Reyländer & Sohn.

Mathematische Reifeprüfungsaufgaben des Königlichen Gymnasiums zu Tilsit 1875—1903.

Vorbemerkungen.

Als 1886 unser Gymnasium die Feier seines 300jährigen Bestehens beging, erschien eine Festschrift und als kleinen Teil davon gab der Unterzeichnete 100 „mathematische Abiturientenaufgaben des Gymnasiums zu Tilsit" heraus, eine Auslese aus den Prüfungsaufgaben, wie sie seit den ältesten Zeiten seit Einführung der Reifeprüfung an unserer Schule gestellt worden waren. Unsere Primaner haben diese Sammlung fleißig benutzt, um daran ihre Kräfte zu messen und sich für ihre eigne Prüfung vorzubereiten. Dieser Umstand sowohl, als auch das Urteil befreundeter Fachgenossen, die mit Interesse davon Kenntnis genommen haben, ermutigt mich, die von mir selbst gestellten (ung. 500) Prüfungsaufgaben aus dem Zeitraum von mehr als drittehalb Jahrzehnten zu veröffentlichen.

Die vorliegende Sammlung enthält fast alle dem königlichen Kommissarius zur Auswahl vorgelegten Aufgaben; die von den Prüflingen bearbeiteten sind mit einem Stern (*) bezeichnet. Von solchen Aufgaben, die mehrmals vorgeschlagen wurden, ist entweder die Zeit ihrer wirklichen Bearbeitung, oder, falls diese nicht eintrat, der erste Termin ihrer Aufstellung vorgedruckt.

Im allgemeinen habe ich mich bemüht, die Aufgaben selbständig zu erfinden und ich würde mich freuen, wenn meine Fachgenossen daraus neue Anregungen gewinnen würden. Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß ich aus anderen Sammlungen unbewußt die Idee zu dieser oder jener Aufgabe geschöpft habe. Indessen habe ich zur Stellung gewisser trigonometrischer Aufgaben, bei denen eine Gleichung mit dem Sinus und Kosinus eines unbekannten Winkels zum Ziele führt, von der Sammlung der „geometrischen Konstruktionsaufgaben" von Lieber und v. Lühmann § 142 Gebrauch gemacht. Ferner habe ich aus den von denselben Verfassern herausgegebenen „trigonometrischen Aufgaben" die Tabellen vollständig berechneter schiefwinkliger Dreiecke zu Zahlenbeispielen vielfach benutzt.

Bezeichnungen und Abkürzungen. Die äußere Fassung der Aufgaben ist der Raumersparnis wegen vielfach vereinfacht worden. Insbesondere sind für Dreiecke folgende üblichen Bezeichnungen gewählt worden: a, b, c sind die Seiten, α, β, γ die Winkel, h (h_a, h_b, h_c) die Höhen, t die Mittellinien, w die Winkelhalbierungslinien, u und v die durch w_c, p und q die durch h_c auf c gebildeten Abschnitte; F ist die Fläche; r, ρ, ρ_a, ρ_b, ρ_c sind die Halbmesser des Umkreises (umbeschriebenen Kreises), des Innenkreises und der

drei Außenkreise (d. h. der vier Berührungskreise). Beim Viereck sind die Seiten der Reihe nach a, b, c, d; α, β, γ, δ sind die Winkel, und zwar α = W. (a, d) u. s. w.; e und f sind die Diagonalen, und zwar verbindet e die Scheitel von α und γ. — Die gebrauchten Abkürzungen bedürfen kaum der Erklärung, wie z. B. . . . k. = . . . kante, Kr. = Kreis, Ppp. = Parallelepipedon, rg. = regelmäßig, rw. = rechtwinklig, Umdk. = Umdrehungskörper, zz. = zu zeichnen.

I. Arithmetik.*)

1. M. 77*. Ganze Zahlen x, y, z zu finden aus: $5x + 7y + 9z = 38$, $7x + 9y + 11z = 50$.

Aufl. 2 + h, 4 — 2h, h. (3, 2, 1.)**)

2. M. 78. Ganze Zahlen u, x, y, z zu finden aus: $3u - 4x + 2y - z = -3$, $2u - 3x + y - 2z = -9$, $8u - 3x + 2y + z = 12$.

Aufl. 1 + k, 2 + 17k, 3 + 27k, 4 — 11k.

3. M. 81. Die Gll.

$$5x - 7y + 9z + 11u = 33,$$
$$7x - 5y + 11z + 9u = 27,$$
$$11x - 9y + 7z + 5u = 15$$

in ganzen Zahlen zu lösen. Die Richtigkeit der allgemeinen Lös. mit Hilfe von Determinanten nachzuweisen. Aufl. h, h, — h, 3 + h.

4. M. 80*. Zwei ganze Zahlen x u. y zu finden aus:

$$3x + 4y = 259;\ x \equiv 4 \ (\text{Mod } 7) \equiv 1 \ (\text{Mod } 12),$$
$$y \equiv 1 \ (\text{Mod } 5) \equiv 2 \ (\text{Mod } 4).$$

Aufl. 25 + 1680h, 46 — 1260h.

5. M. 75. Es sollen 3 ganze Zahlen so bestimmt werden, daß die erste, durch 3 geteilt, den Rest 1, die zweite, durch 5 geteilt, den Rest 3, und die dritte, durch 7 geteilt, den Rest 5 läßt. Außerdem sollen solche 3 Zahlen sich wie 1 : 2 : 3 verh.

Aufl. 4 + 105k, 8 + 210k, 12 + 315k.

6. M. 76*. Die Periph. dreier Kr. sind zusammen 19mal so groß wie die Periph. eines Kr., dessen Halbm. = 1 ist. Nur 3mal soviel betragen ein Quadrant des ersten, ein Sextant des zweiten und ein Oktant des dritten zusammen. Die Halbm. der 3 Kr. sollen in positiven ganzen Zahlen angegeben werden. — Aufl. 5 — h, 3h, 14 — 2h.

7. O. 76*. Die Grundl. von 4 Dr. sind der Reihe nach = 3, 4, 7 u. 8. Die Dr. haben zusammen einen Inhalt = 55. Die Summe ihrer Höhen beträgt 18, und die erste Höhe wird von der zweiten um ebensoviel an Länge übertroffen wie die dritte von der vierten. Die Höhen in ganzen Zahlen anzugeben.

Aufl. 5 — 3h, 5h, 9 — 5h, 4 + 3h.

---

*) Die Einteilung der vorliegenden Sammlung in Gruppen ist schwierig, da viele Aufgaben verschiedene Gebiete zugleich berühren. Der Umstand, daß die 4 Hauptgruppen eine sehr ungleiche Zahl von Aufgaben enthalten, erklärt sich daraus, daß die Verteilung ursprünglich vielfach anders war. So waren z. B. die astronomischen Aufgaben meistens der Stereometrie zugeteilt. Eine Einteilung in Untergruppen wird auch ohne besondere äußere Andeutungen leicht erkennbar sein.

**) In dieser und in ähnlichen Aufgaben bedeuten h, k, . . . ganze positive oder negative Zahlen.

8. D. 80. Den Ausdruck $36x^2 - 9xy - 15y^2$ in 2 Glieder zu zerlegen, wovon das eine $2x - 3y$, das andere $3x - 4y$ als Faktor hat. Die Koeffizienten der fehlenden Faktoren sollen ganze Zahlen sein.

Aufl. Diese Koeff. sind: $-84 + 3k$, $1 - 4k$, $68 - 2k$, $3 + 3k$.

9. D. 77*. Bei welchen arithm. Reihen zweiter Ordnung, deren Glieder positive oder negative ganze Zahlen sind, ist die Summe der 3 ersten Glieder $= 17$ und das vierte Glied auch $= 17$? — Aufl. $a_n = 1 - 20k + n \cdot 17k + n^2 (1 - 3k)$.

10. D. 82*. Die linearen Faktoren anzugeben, worin sich $6x^2 + 17xy + 12y^2 + 22xz + 31yz + 20z^2$ zerlegen läßt. — Aufl. $(3x + 4y + 5z)(2x + 3y + 4z)$.

11. D. 81*. In einer arithm. Reihe zweiter Ordnung ist das Produkt des 1. und 4. Gliedes gleich demjenigen des zweiten und dritten. Das 5. Glied ist $= 2$ und das sechste $= 6$. Das wievielte Glied ist 42? — Aufl. Das 10. Glied. (2 gleiche Lös.)

12. D. 82. Aus $3x^2 - 87x + 547$ entsteht eine arithm. Reihe, wenn darin statt x die Zahlen 1, 2, 3, . . . gesetzt werden. Wie groß ist die Anzahl der Glieder, deren Summe 1728 ist? (3 Lös.!) Aufl. 6; 12; 24.

13. D. 79*. Von einer arithm. Reihe dritter Ordnung ist die Summe des 3. u. 5. Gliedes $= 100$, die Summe des 4. u. 6. Gliedes $= 196$, die Summe des 1., 4. u. 7. Gliedes $= 300$, u. das 8. Glied $= 400$. Wie groß ist das p^{te} Glied?

Aufl. $p^3 - 2p^2 + 2p$.

14. D. 76*. Von einer arithm. Reihe der dritten Ordnung ist das erste Glied $= 10$, das dritte 106, das fünfte 434 u. das sechste 730. Wie groß sind das zehnte, das n^{te} Glied u. die Glieder der dritten Differenzenreihe? Aufl. 3214; $4 + n + 2n^2 + 3n^3$; 18.

15. D. 78. Sämtliche 10 Wurzelpaare von $x^5 + y^5 = 275$, $xy = 6$ anzugeben.

Aufl. 1) bis 5) 3λ u. 2μ; 6) bis 10) 2λ u. 3μ; 1) $\lambda = \mu = 1$; 2) λ, μ bezw. $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \pm \frac{i}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$; 3) bis 5) folgt aus 2), indem im ersten, oder im zweiten Gliede, oder in beiden das Vorzeichen verändert wird.

16. D. 79. $u + x + y + z = 5^5/_6$;

$ux + uy + uz + xy + xz + yz = 10^1/_3$;

$uxy + uxz + uyz + xyz = 5^5/_6$; $uxyz = 1$.

Aufl. 1) bis 24) $^1/_3$, $^1/_2$, 2, 3 in beliebiger Reihenfolge.

17. M. 86*. 5 Zahlen so zu best., daß ihre Summe $= 5^1/_2$, die Summe aller Produkte je zweier Zahlen $= 5^1/_2$, von je 3 Zahlen $= -5^1/_2$, von je 4 Zahlen $= -5^1/_2$ u. das Produkt von allen 5 Zahlen $= -1$ ist.

Aufl. -1, $^1/_2$, 2, $2 \pm \sqrt{3}$.

18. D. 77*. $x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$.

Aufl. -3, -2, -1, 2. Die Reduktion führt auf eine einfache kubische Gleichung.

19. M. 82*. $2x^8 - 9x^7 + 22x^6 - 36x^5 + 42x^4 - 36x^3 + 22x^2 - 9x + 2 = 0$.

Aufl. 1; 1; $\frac{1}{4}(1 \pm i\sqrt{15})$; $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$; $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$.

20. M. 75. $x^3 + y^3 - 31 = (x + y - 3)^2$

$x^3 + y^3 - 30 = x + y$.

Aufl. 3, 2; 2, 3; $1 \pm \sqrt{5}$, $1 \mp \sqrt{5}$.

21. M. 75*. Multipliziert man die Summe zweier reellen Zahlen mit der Summe ihrer Quadrate, so erhält man 65. Die Summe ihrer Kuben ist 35. Welches sind die beiden Zahlen? Aufl. 2 und 3.

22. O. 83. $x + y - x^3 - y^3 = \frac{1}{2}$; $x^2 + y^2 = {}^2/_3$.

Aufl. 1) $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{{}^1/_3})$; $y = \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{{}^1/_3})$;

2) $x = 0{,}4447\underline{1} \pm i.\ 0{,}5888\underline{4}$; $y = -0{,}9447\underline{1} \pm i.\ 0{,}2771\underline{9}$.

23. O. 77. $(x^2 - y^2) : (x^4 - y^4) : (x^6 - y^6) = a : b : c$; $x \gtrless y$.

Zahlenbeispiel: $a = 1$, $b = 5$, $c = 21$.

Aufl. x^2 bezw. $y^2 = \frac{1}{2a}(b \pm \sqrt{4ac - 3b^2})$; z. B.: 2, ± 1; − 2, ± 1; 1, ± 2; − 1, ± 2. (8 Lös.)

24. O. 85. $\left.\begin{array}{l} xy + \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2} = a \\ x + y = b \end{array}\right\}$ $a = {}^{63}/_{65}$; $b = {}^{64}/_{65}$.

Aufl. $x - y = \sqrt{1-a}\,\sqrt{2 - \frac{b^2}{1+a}}$; Zahlenbeisp.: $x = {}^3/_5$, $y = {}^5/_{13}$ (oder umgekehrt).

25. M. 85*. $\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{37}{13}$, $4x^4 + 5x^2y^2 + 4y^4 = 2068$.

Aufl. 1) bis 4) 4λ, 3λ; 5) bis 8) 3λ, 4λ; $\lambda = \pm 1, \pm i$.

26. M. 77. $\left.\begin{array}{r} x^2 + xy + y^2 = a\,(x + y) \\ xy = b\,(x + y) \end{array}\right\}$ $a = 5\,{}^2/_7$, $b = 1\,{}^5/_7$.

Aufl. x, y bezw. $= \frac{1}{2}\left(a + b \pm \sqrt{a^2 - 2ab - 3b^2}\right)$

Zahlenbeisp.: 0, 0; 0, 0; 4, 3; 3, 4.

27. M. 78*. $x^2 + 3xy + y^2 = a\,(x^2 + y^2)\,(x + y)$,
$x^2 + 4xy + y^2 = b\,(x^2 + y^2)\,(x + y)$;
z. B. $a = {}^{31}/_{65}$; $b = {}^{37}/_{65}$.

Aufl. x, y bezw. $= \lambda\,(\sqrt{2a - b} \pm \sqrt{6a - 5b})$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$; $1 : \lambda_3 = 2\,(4a - 3b)\,\sqrt{2a - b}$. Zahlenbeisp.: 1) bis 4) 0, 0; 5) 3, 2; 6) 2, 3.

28. O. 86. $x^3 - y^3 = 19$,
$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 26\,\frac{3}{5}\,(x + y)$.

Aufl. 1) bis 3) 3λ, 2λ; 4) bis 6) $4\lambda\sqrt[3]{{}^{19}/_{65}}$, $-\lambda\sqrt[3]{{}^{19}/_{65}}$; $\lambda = 1, \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$.

29. O. 83. $(x^2 + y^2)\,(x - y)^2 = \frac{13}{36}\,x^2y^2$; $2x + 5y = 16$.

Aufl. 3, 2; $1\,\frac{13}{19}$, $2\,\frac{10}{19}$; $\frac{2}{41}\left(19 \pm 5i\sqrt{143}\right)$; $\frac{4}{41}\left(29 \mp i\sqrt{143}\right)$.

30. M. 84*. $x^3y + x^2y + xy + y = 45$,
$x^6y^2 + x^4y^2 + x^2y^2 + y^2 = 765$.

Aufl. 1) 2, 3; 2) ${}^1/_2$, 24; 3) u. 4) $\frac{1}{14}\left(-9 + i\sqrt{115}\right)$; $40 - i\sqrt{115}$.

31. D. 91*. $(x^2+y^2)(x-y)^2=136;\quad 3(x+y)^2-11xy=27.$
Aufl. 1) u. 2) $\pm 5, \pm 3$; 3) u. 4) $\pm 3, \pm 5$; 5) bis 8) x, y bezw. $=\sqrt{8,3}\pm\sqrt{1,7}$.
32. M. 90. $x+2y=4;\quad x^4-3x^2y^2+16y^4=20.$
Aufl. 1) 2, 1; 2) 2, 1; 3) u. 4) $2\pm 12i\sqrt{0,3}\,,\ 1\mp 6i\sqrt{0,3}$.
33. M. 86. $(x^3+y^3)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=a,\quad (x^3-y^3)\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\right)=b.$
Aufl. $\frac{(a-b)(\sqrt{5+w}\pm\sqrt{-3+w})}{4\sqrt{5+w}};\quad w=\pm\sqrt{\frac{9a-b}{a-b}}$
34. M. 83. $x^3+4x^2y+8xy^2+8y^3=84(x-2y)$
$x^4+16x^2y^2+16y^4=44(x^2-4y^2).$
Aufl. 1) 0, 0; 2) 4, 1; 3) $-4, -1$; 4) 0, 0; 5) $2i, 2i$; 6) $-2i, -2i$;
7) bis 12) $x=\lambda(\sqrt{7}\pm i\sqrt{3});\ y=\lambda(\sqrt{7}\mp i\sqrt{3});\ \lambda_1=0;\ \lambda_2, \lambda_3=(1\pm i)\cdot\sqrt[4]{7/3}$.
35. D. 76*. $\left.\begin{array}{l} x^2+xy+y^2=a \\ \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=b \end{array}\right\}$ z. B. $a=19$, $b=7\,^6/_{13}$.
Aufl. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{b+w}\pm\sqrt{8a-3b-3w})$. (8 Lösf.)
$w=\pm\sqrt{8a^2-8ab+b^2}$
z. B. 3, 2; 2, 3; $-3, -2$; $-2, -3$; $\sqrt{\frac{19}{13}}(\sqrt{-3}\pm\sqrt{22})$.
36. M. 82. $(x^4+y^4):(x^2+y^2)=a:1$
$(x^2+3xy+y^2):(x^2+y^2)=b:(x^2+5xy+y^2).$
Aufl. x, y bezw. $=\lambda(\sqrt{2a+2b+r}\pm\sqrt{6a-2b+r})$;
$644\lambda^2(a-b)=52a+16b-17r;\ r^2=a^2+13ab+2b^2.$
37. M. 79*. $(6x^3+5x^2y+5xy^2+6y^3)(x+y)=a$
$(5x^3-6x^2y+6xy^2-5y^3)(x-y)=b.$
Aufl. x, y bezw. $=\lambda(\sqrt{31a-13b+r}\pm\sqrt{-9a+35b+r})$;
$r^2=81a^2+250ab+169b^2;\ 352\lambda^4(101a+145b+11r)=1.$
38. D. 78. $15x^2-13xy+2y^2=0;\quad 10y^2-11yz+3z^2=0;$
$x^3+y^3+z^3=a^3.$
Aufl. 1) $2\lambda, 3\lambda, 5\lambda;\ \lambda=a:\sqrt[3]{160}$; 2) $2\lambda, 3\lambda, 6\lambda;\ \lambda=a:\sqrt[3]{251}$;
3) $\lambda, 5\lambda, 10\lambda;\ \lambda=a:\sqrt[3]{1126}$; 4) $3\lambda, 15\lambda, 25\lambda;\ \lambda=a:\sqrt[3]{19027}$;
$\lambda', \lambda''=\frac{a}{\sqrt[3]{160}}\cdot\frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$; u. s. w.
39. M. 80. $6x^4-35x^3y+62x^2y^2-35xy^3+6y^4=0;$
$x:z=2:3;\quad x+y+z=12.$
Aufl. 1) 4, 2, 6; 2) $2\,^2/_3$, $5\,^1/_3$, 4; 3) $2\,^2/_{11}$, $6\,^6/_{11}$, $3\,^3/_{11}$; 4) $4\,^4/_{17}$, $1\,^7/_{17}$, $6\,^6/_{17}$.
40. M. 95. $x+y=z+2;\quad x^2+y^2=z^2;\quad x^3+y^3=z^3-34.$
Aufl. 1) 3, 4, 5; 2) 4, 3, 5.

41. M. 85. $(2x + 3y)(x^3 + y + z) = 48$, $(4y + 5z)(x^3 + y + z) = 138$, $(6z + 7x)(x^3 + y + z) = 150$.
Aufl. 1) u. 2) $\pm 1, \pm 2, \pm 3$; 3) u. 4) $i\sqrt{6}, 2i\sqrt{6}, 3i\sqrt{6}$.

42. O. 86. $x - y = \frac{3}{2} z$; $xy = z^2$; $x^5 + y^5 = 512\frac{1}{2} z$.

Aufl. 1) 0, 0, 0; 2) bis 5) $4\lambda, \lambda, 2\lambda$; $\lambda = \pm 1, \pm i$. 6) 0, 0, 0; 7) bis 10) $-\lambda_1, -4\lambda_1, 2\lambda_1$; $\lambda_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 \pm i\right)}$.

43. M. 90*. $x + y + z = 8$; $x^2 + y^2 + z^2 = 26$; $x^2 - yz = 13$.
Aufl. 4, 3, 1; 4, 1, 3.

44. M. 91*. Die Diagonalfl. eines rw. Ppp. verh. sich zueinander wie $\sqrt{544} : \sqrt{369} : 25$. Die Gesamtoberfl. ist $= 94$. Wie groß sind die Kanten? Aufl. 4, 3, 5. (— 4, — 3, — 5).

45. O. 87*. $x + y = \sqrt{44 + z}$; $xy = 7 + z$; $x^4 + y^4 = z^2 + 312$.

Aufl. 1) 4, 3, 5; 2) 3, 4, 5; 3) u. 4) $\frac{1}{2}\left(i\sqrt{5} \pm \sqrt{163}\right)$; $\frac{1}{2}\left(i\sqrt{5} \mp \sqrt{163}\right)$; — 49.

46. M. 89. Der Inh. eines rw. Ppp. ist $= 60$, die Summe aller Kanten $= 48$ u. die Höhe ist gleich der Diag. der Grundfl. Wie lang sind die Kanten?

Aufl. 3, 4, 5. $\left(\frac{1}{2}(11 \pm i\sqrt{119}); 1\right)$.

47. O. 89. $xy = 8z$; $z(x^2 + y^2) = 20$; $x^4 + y^4 = 273 - z^2$.
Aufl. 1) u. 2) $\pm 4, \pm 2, 1$; 3) u. 4) $\pm 2, \pm 4, 1$; 5) u. 6) $\pm 4i, \pm 2i, -1$; 7) u. 8) $\pm 2i, \pm 4i, -1$; 9) bis 16) $x, y = \frac{1 + i}{2\sqrt{127}} \cdot \sqrt{127^{3/2} \pm \sqrt{1945983}}$; $z = -\frac{20i}{\sqrt{127}}$.

48. M. 91. $y^4 + 6y^2z^2 + z^4 = (y + z)^2 + 10x + 2$;
$2y^3z + 2yz^3 = 35 - 5x$; $y^2 - z^2 = 3$.

Aufl. 1) 3, 2, 1; 2) 3, — 2, — 1; 3) u. 4) $3\frac{221}{256}, \frac{5}{8} i\sqrt{2}, \frac{11}{8} i\sqrt{2}$.

49. O. 84*. $5(x^2 + y^2 + z^2) - (3x + y)(x + y + z) = 5$,
$5(x^2 + y^2 + z^2) - (3y + z)(x + y + z) = 10$,
$5(x^2 + y^2 + z^2) - (3z + x)(x + y + z) = 20$.

Aufl. 1) u. 2) $\pm 2, \pm 2, \pm 1$; 3) u. 4) $\frac{1}{2}\sqrt{10}, \frac{1}{2}\sqrt{10}, 0$.

50. O. 81. $2x^2 - 3y^2 + 3zx - 2yz = -19$; $2y^2 - 3z^2 + 3xy - 2zx = -28$;
$2z^2 - 3x^2 + 3yz - 2xy = 44$. Aufl. 2, 3, 4; — 2, — 3, — 4.

51. M. 98. $x(x + y + z) - (x^2 + y^2 + z^2) = a$;
$y(x + y + z) - (x^2 + y^2 + z^2) = b$;
$z(x + y + z) - (x^2 + y^2 + z^2) = c$.
Aufl. $x = (ab + ac - b^2 - c^2) : \sqrt{2(3abc - a^3 - b^3 - c^3)}$; u. s. w.

52. M. 81*. $3x^2 - yz + 2zx + 2xy = a^2 + ab$;
$3y^2 - zx + 2xy + 2yz = b^2 + ab$; $3z^2 - xy + 2yz + 2zx = -ab$.
Aufl. 1) $u(5a^2 + 5ab - b^2)$, $u(-a^2 + 5ab + 5b^2)$, $u(-a^2 - 7ab - b^2)$;
2) $3u\sqrt{2}(a^2 + ab)$, $3u\sqrt{2}(b^2 + ab)$, $3u\sqrt{2}(-ab)$;
$1 : u = \pm 3\sqrt{6}\sqrt{a^2 + ab + b^2}$.

53. M. 89*. In einem rw. Ppp. übertrifft das Rechteck aus je einer Kante und der Summe aller Kanten die ganze Oberfl. bezw. um 146, 98 u. 50. Wie lang sind die Kanten?

Aufl. 5, 4, 3. $(-5, -4, -3;\ \pm 13:\sqrt{3},\ \pm 1:\sqrt{3},\ \mp 11:\sqrt{3}.)$

54. M. 92. $x + 2 = \frac{5}{3}(y + z);\ x^2 - 4 = \frac{5}{3}(y^2 - z^2);$

$x^3 + 8 = \frac{35}{9}(y^3 + z^3).$ Aufl. 1) 3, 2, 1; 2) $1^1/_3,\ ^2/_3,\ 1^1/_3$.

55. O. 92. Wenn man bei einem rw. Ppp. aus der doppelten Summe zweier ungleichen Kanten und aus der Summe aller Kanten ein Rechteck bildet, so ist dieses um a, b oder c größer als das Quadr. über der Raumdiag., je nach der Wahl der Kanten. Wie groß sind die Kanten?

Aufl. (4 Lös.) $\pm \frac{-26a + 19b + 19c + r}{6\sqrt{30}\sqrt{4(a+b+c)+r}}$; u. s. w.

$r^2 = (a + b + c)^2 + 45(a^2 + b^2 + c^2).$

56. O. 78*. $x + y + z = -1\frac{1}{2};\ x^2 + y^2 + z^2 = 5\frac{1}{4};\ xyz = 1.$

Aufl. 6 Lös.: $-2,\ -^1/_2,\ 1$ in beliebiger Reihenfolge.

57. M. 76. $x + y + z = 6;\ x^2 + y^2 + z^2 = 30;\ xyz = -10.$

Aufl. -1, 2, 5; s. 56.

58. O. 86*. Ein rw. Ppp. ist = 8, seine Oberfl. = 28, und die Summe aller Kanten = 28. Wie groß sind die Kanten? Aufl. 1, 2, 4.

59. M. 86. $3x - 4y + 5z = 19u,\ 5x + 6y - 2z = 18u,\ 6x - 5y + z = 2u,$

$\frac{x-y}{y-z} - \frac{z-u}{u-x} = 4\frac{1}{2}u^4.$ Aufl. 1) bis 4) 2u, 3u, 5u; $u = \pm 1, \pm i$.

60. O. 83*. $y + z = 3 + 2x;\ z + x = 4 + 2u;\ x + y = 3 + 2u;$
$6u^4 - 35(x-1)^3 + 62(y-2)^2 - 35z + 111 = 0.$

Aufl. 1) $^1/_3,\ 1^1/_3,\ 2^1/_3,\ 3^1/_3$; 2) $^1/_2,\ 1^1/_2,\ 2^1/_2,\ 3^1/_2$; 3) 2, 3, 4, 5; 4) 3, 4, 5, 6.

61. O. 92. $(3u - 2x) : (3y - 2z) = 1 : 2;$
$(u + y) : (x + z) = 2 : 3;\ u^2 + z^2 = x^2 + y^2;$
$(u + x)^4 - (u + y + z)^2 = 16uxyz.$

Aufl. 1) u. 2) $\pm 2, \pm 3, \pm 2, \pm 3$; 3) bis 6) 0, 0, 0, 0;
7) u. 8) $\pm ^6/_7;\ \pm 1^2/_7;\ \mp ^6/_7;\ \mp 1^2/_7$.

62. M. 83. $u^4 + x^4 + y^4 + z^4 - 3(u^2x^2 + y^2z^2) = 44;$
$u - x + y - z = -3;\ u - x - y + z = -1;\ u : y = z : 2x.$

Aufl. 1) 1, 3, 2, 3; 2) 1, 3, -3, -2; 3) -3, -1, 2, 3; 4) -3, -1, -3 -2;
5) bis 8) u, x bezw. $= \mp 1 + \sqrt{2{,}8}$; y, z bezw. $= \frac{1}{2}(\mp 1 + \sqrt{15{,}4})$.

63. M. 92*. Für welche Werte von x wird $f(x) = 2x^3 - 33x^2 + 168x - 30$ am größten oder kleinsten? Aufl. $f(4) = 242$ ist Max.; $f(7) = 215$ ist Min.

64. O. 00*. Für welche Werte von x wird $f(x) = (2x^2 - 2x + 3) : (2x + 1)$ am größten oder kleinsten? Aufl. $f(1) = 1$ ist Min.; $f(-2) = -5$ ist Max.!

65. M. 76*. $x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{y + \cdots}}}}$; $y = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{x + \cdots}}}}$.

$a, b, x, y > 0$.

Aufl. $\frac{1}{a + \sqrt{ab}}$, $\frac{1}{b + \sqrt{ab}}$.

66. M. 79. $x + y + z = 3^1/_3$; $x, y, z > 0$.

$y = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{z + \cdots}}}}$; $z = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cdots}}}}$.

Aufl. 1) 3, $^1/_6$, $^1/_6$; 2) $^1/_3$, $1^1/_2$, $1^1/_2$.

67. O. 78*. $\sin y = \cfrac{1}{\sin x + \cfrac{1}{\sin y + \cfrac{1}{\sin x + \cfrac{1}{\sin y + \cdots}}}}$

$x - y = 60^0$, x u. y $> 0, < \pi$.

Aufl. 90^0, 30^0; 150^0, 90^0.

68. M. 77. $\cos x = \cfrac{1}{\tan x + \cfrac{1}{\cot x + \cfrac{1}{\tan x + \cfrac{1}{\cot x + \cdots}}}}$

$o < x < \frac{\pi}{2}$.

Aufl. $x = 38^0\ 10'\ 22''$.

69. O. 77*. Die W. α, β, γ eines Dr. zu best. aus

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{168}{65},\ \sin {}^1/_2\,\gamma + \cos {}^1/_2\,\gamma = \frac{5}{\sqrt{13}}.$$

Aufl. 1) $\alpha = 59^0\ 29'\ 23''$, $\beta = 53^0\ 7'\ 48''$, $\gamma = 67^0\ 22'\ 48''$.

2) $\sin\alpha$, $\sin\beta$ bezw. $= \frac{6}{65}(9 \pm i\sqrt{101})$, $\sin\gamma = {}^{12}/_{13}$.

70. O. 76*. $\sin(x + y) : \sin(x - y) = a : b$; $\cos(x + y) : \cos(x - y) = d : c$.
z. B. $a = 13$, $b = 12$, $c = 25$, $d = 24$.

Aufl. $\tan x = \pm\sqrt{\frac{(a + b)(c - d)}{(a - b)(c + d)}}$; $\tan y = \pm\sqrt{\frac{(a - b)(c - d)}{(a + b)(c + d)}}$

z. B. $x = \pm 35^0\ 32'\ 16'' + h\pi$, $y = \pm 1^0\ 38'\ 12'' + k\pi$.

71. M. 76*. $(1 - \cos x)(1 + \cos y) = a^2$; $\sin\frac{x+y}{2} - \sin\frac{x-y}{2} = b$ z. B. $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Aufl. $\sin\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}(\pm a + b)$; $\sin\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(\pm a - b)$.

Zahlenbeispiel: $\pm 210^0$ und 90^0, $\pm 270^0$ und 30^0; $\pm 90^0$ und -30^0; $\pm 150^0$ und -90^0. In jeder Gruppe kann x um $2h\pi$ und y um $2h\pi + 4k\pi$ vermehrt werden.

72. O. 80. $\tan^4\varphi + \frac{4\tan^3\varphi}{\sin\alpha} + 2\tan^2\varphi - \frac{4\tan\varphi}{\sin\alpha} + 1 = 0$.

Aufl. $\varphi = \frac{1}{4}\left(h\pi + (-1)^h . \alpha\right)$.

73. O. 77. $\frac{81}{121(1-x)} = 1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + \ldots$; $-1 < x < 1$.

Aufl. $x = 0,1$.

74. O. 80*. $\frac{1,12}{(1+x)^3} = 1 - 2x + 5x^2 - 10x^3 + 17x^4 - \ldots$; $-1 < x < 1$.

Aufl. 1) 0,1; 2) — 0,6.

75. M. 78*. Den reellen, positiven Bogen x zu finden aus: $0,99 = \frac{\sin x}{x}$.

Aufl. $14^0\ 3'\ 20''$.

76. M. 77. Wie groß ist der zum Radius Eins gehörige kleine Bogen x, wenn $x + \cos x = 1,01$ ist? Aufl. 0, 010 050 5.

77. O. 92*. Über eine feste Rolle läuft ein Faden, dessen Enden durch freischwebende Gewichte von je 5000 Gramm belastet sind. Erhält die eine Seite ein Übergewicht, so fällt die schwerere Masse in 8 Sek. 3105 mm. Wenn man das Übergewicht verdoppelt, so beträgt die Fallstrecke in derselben Zeit 6149 mm. Wie groß ergiebt sich das erste Übergewicht u. die Konstante der Schwerkraft, wenn die Reibung u. das Gewicht von Rolle und Faden vernachlässigt wird? Aufl. 100,197 Gramm; $9,781\underline{0}$ m.*)

78. M. 93*. Über eine feste Rolle läuft ein Faden, dessen freischwebende Enden durch Gewichte von je 300 Gramm belastet sind. Erhält die eine Seite nacheinander 2 verschiedene Übergewichte, das zweite Mal 600 Gramm mehr als das erste Mal, so fällt die schwerere Masse das erste Mal in 5 Sek. ebensoweit, wie das zweite Mal in 4 Sek. Wie groß ist das erste Übergewicht, wenn die Reibung und das Gewicht von Rolle u. Faden außer Rechnung bleibt? Aufl. 400 Gramm.

79. O. 94*. Eine Kugel rollt eine schiefe Ebene (Steigung 10 : 109) 655,2 m aufwärts u. hat dann noch eine Geschw. von 49,2 m. Welche Anfangsgeschw. müßte sie besessen haben, wenn die Reibung ohne Einfluß bliebe? (g = 9,81 m). Aufl. 60 m. (12 Sek.)

80. O. 95*. Eine starre Gerade AB von 1 m Länge ist in A mit einer Masse von 3,6 kg, in B mit 3,2 kg belastet. Die Gerade wird um einen P. C, der auf ihrer Verlängerung über A hinaus liegt, 3mal in jeder Sek. herumgedreht. Wie weit liegt C von A

*) Der Strich unter der letzten Ziffer deutet an, daß ihre Angabe unsicher ist.

entfernt, wenn die Spannung der Geraden bei C 362,18 kg beträgt? (g = 9,81 m.) Aufl. 1 m.

81. O. 95. 2 Kugeln von 12 t u. 18 t Gewicht ziehen sich in einer Entf. von 15 m mit einer Kraft von 6,4243 mg an. Wie groß ist die Dichte der Erde, wenn diese als homogene Kugel mit einem Halbm. von 6370,3 km angenommen wird? Aufl. 5,6.

82. O. 96. Wie groß ist die Anziehung zwischen Erde u. Mars bei einer Entf. von 200 Millionen km, wenn der Halbm. der Erde = 6370 km, ihre Dichte = 5,6 u. ihre Masse 10mal so groß wie die des Mars angenommen wird? Aufl. 615 060 Millionen Tonnen.

83. M. 81. Eine Kugel wird unter 60° mit der Anfangsgeschw. 500 m abgeschossen. Die Lage des Brennp. der Wurfkurve zu best. (g = 9,8 m). Aufl. Der Brennp. liegt in der horiz. Entf. 11046 m 6377,6 m hoch.*)

84. M. 77*. Die Spitze eines Turms, der 1000 m entfernt u. 50 m hoch ist, wird von einer Kugel getroffen, die unter 20° 40′ abgeschossen wird. Wie groß ist ihre Anfangsgeschw.? (g = 9, 808 m.) Aufl. 130, 845 m.

85. M. 83. Ein Geschoß erreicht in einer horiz. Entf. von 15360 m seine größte Höhe 5760 m. Welche Höhe erreicht es in einer hor. Entf. von 26 880 m? (g = 9,8 m.) Aufl. 2520 m.

86. M. 89*. Mit welcher Anfangsgeschw. u. unter welchem W. muß eine Kugel abgeschossen werden, wenn sie in einer horiz. Entf. von 3360 m die größte Höhe ihrer Bahn, nämlich 490 m, erreichen soll? (g = 9,8 m.) Aufl. 350 m; 16° 15′ 37″.

87. M. 85*. Unter welchem W. u. mit welcher Anfangsgeschw. wird eine Kugel geworfen, wenn sie in einer horizontalen Entf. von $12\frac{1}{2}$ m die größte Höhe u. in einer hor. Entf. von 15 m eine Höhe von 12 m erreicht? (g = 9,8 m.)

Aufl. 63° 26′ 6″ (tan x = 2); $17\frac{1}{2}$ m.

88. O. 79. Unter welchem W. und mit welcher Anfangsgeschw. wird eine Kugel in einer wagerechten Ebene abgeschossen, wenn sie in einer hor. Entf. von 1000 m einen 10 m hohen P. trifft und 500 m weiter zur Erde fällt? (g = 9, 808 m.) Aufl. 1° 43′ 6″; 495,40 m.

89. M. 85. Unter welchem W. und mit welcher Anfangsgeschw. wird eine Kugel geworfen, wenn sie in einer horiz. Entf. von 60 m eine Höhe von 48 m erreicht und wenn ihre größte Wurfhöhe 50 m beträgt? (g = 9,8 m.)

Aufl. 1) $\alpha = 63^0\ 26'\ 6''$ ($\tan \alpha = 2$); c = 35 m.

2) $\alpha = 53^0\ 7'\ 48''$ $\left(\tan \alpha = \frac{4}{3}\right)$; c = 39,1312 m. In beiden Fällen wird der höchste P. in $\frac{10}{7}\sqrt{5}$ Sek. erreicht, die Höhe von 48 m im ersten Falle später (nach $\frac{12}{7}\sqrt{5}$ Sek.), im zweiten früher (nach $\frac{8}{7}\sqrt{5}$ Sek.).

90. M. 78. Mit welcher Anfangsgeschw. und unter welchem W. muß eine Kugel abgeschossen werden, wenn sie in der horizontalen Entfernung von 800 m einen 100 m hohen Punkt, und 400 m dahinter einen ebenso hohen P. treffen soll? (g = 9,8 m.) Die erforderlichen Formeln für die Wurfbewegung sind abzuleiten. — Aufl. 221,544 m; 11° 46′ 6″.

*) Bei den physikalischen Aufgaben ist, auch wenn im einzelnen nicht darauf hingewiesen wird, der Einfluß des Luftwiderstandes, des Kapillardrucks und der Reibung zu vernachlässigen. Die Schwerkraft wird stets als unveränderlich angenommen.

91. M. 79* Unter welchem W. und mit welcher Anfangsgeschw. muß eine Kugel abgeschossen werden, wenn sie in der horizontalen Entfernung von 1000 m eine Höhe von 100 m und 1000 m weiter eine Höhe von 50 m erreichen soll? ($g = 9{,}808$ m.)

Aufl. $259{,}6\underline{0}$ m; $9^0\ 55'\ 3\underline{5}''$.

92. M. 93. Unter welchem W. muß eine Kugel abgeschossen werden, wenn ihre Anfangsgeschw. 720 m beträgt und wenn sie in einer horiz. Entf. von 6000 m ein 1800 m hohes Ziel trifft? ($g = 10$ m.) — Aufl. 1) $20^0\ 4'\ 5\underline{7}''$; 2) $86^0\ 37'\ \underline{0}''$.

93. O. 86*. 2 Geschütze sind 6 km voneinander entfernt. Unter welchem W. müssen sie gerichtet und gleichzeitig abgeschossen werden, wenn ihre Geschosse, deren Anfangsgeschw. bezw. 400 m u. 300 m beträgt, nach 12 Sekunden aufeinander treffen sollen?

Aufl. $\alpha_1 = 36^0\ 52'\ 12''$ ($\cos \alpha_1 = {}^4/_5$); $\alpha_2 = 90^0 - \alpha_1$; die Geschosse treffen sich im aufsteigenden Bogen ihrer Wurfkurve. Für sich allein würde jedes Geschoß nach 49 Sek. zur Erde gelangen.

94. M. 92. Wie muß man ein gleichseitiges Dr. durch eine zur Basis parallel gehende Gerade teilen, damit die Flächen der zu beiden Teilen gehörenden Umkreise sich wie 1 : 3 verhalten? Aufl. Wenn die Seite des abgeschnittenen Dr. x ist, so ist 1) $x = \frac{1}{2} a$; 2) $x = -a$. Im zweiten Falle liegt die Parallele jenseits der Spitze, und das Trapez besteht aus 2 kongr. Scheiteldr.

95. M. 91. In ein geg. Quadr. (Seite a) wird ein gleichseitiges Dr. so einbeschr., daß eine seiner Ecken in eine Ecke des erstern fällt. In das Dr. wird ein Quadr. beschr., in dieses wie vorher ein Dr., u. s. f. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller Quadr.?

Aufl. $\frac{1}{479} a^2 \left(180 \sqrt{3} + 311\right) = a^2 .\ 1{,}\ 300\ 144.$

96. O. 91. In ein Dr., dessen Grundl. = c u. dessen Höhe = h ist, wird über der Basis ein Quadrat beschr., in das abgeschnittene obere Dr. auf gleiche Art wieder ein Quadr., u. s. f. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller Quadr.? Aufl. $ch^2 : (c + 2h)$.

97. O. 97. In einen Kr. (Halbm. r) wird ein Rechteck beschr., dessen Seiten sich wie 8 : 15 verh., in das Rechteck ein größtmöglicher Kreis, in diesen ein ähnliches Rechteck, u. s. f. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller Rechtecke u. die Summe der ersten 3 Kreise?

Aufl. $\frac{32}{15} r^2$; $\frac{106\ 113\ r^2 \pi}{83\ 521}$.

98. O. 90. Einem Kegelstumpf (Höhe 6 cm) wird eine Kugelfl. umbeschr. Die Inhalte des Kegelstumpfs und der von seinen Grundfl. begrenzten Kugelschicht verh. sich wie 2 : 3. Wenn man die Maßzahlen der Grundr. zur vierten Potenz erhebt, so ist die Summe dieser Potenzen 337. Wie groß ist der Kegelstumpf? Aufl. 74π.

99. M. 00*. Durch die Ecken des von den Geraden $x + 19y = -123$, $14x - 15y = -36$, $15x + 4y = 122$ gebildeten Dreiecks werden Gerade nach dem Anfangsp. der Koord. gezogen. Welche W. bilden diese drei Verbindungslinien miteinander?

Aufl. $111^0\ 19'\ \underline{5}''$; $160^0\ 33'\ 3\underline{6}''$; $88^0\ 7'\ 2\underline{0}''$.*)

---

*) Es werden stets rechtwinklige Punktkoordinaten angenommen.

100. M. 96. In einem Viereck sind die Ecken der Reihe nach (5, 6), (— 1, 2), (— 2, — 1), (4, — 5). Die Koord. des Diagonalenschnittp. und die Fläche des Vierecks zu best. Aufl. $(-{}^{1}/_{6}, {}^{5}/_{6})$; 42.

101. M. 02. Ein Viereck hat die Ecken A (— 9, — 7), B (8, — 4), C (6, 7), D (— 7, 8). Einen P. P so zu best., daß 1) Dr. ABP = CDP u. 2) BCP = ADP ist. Aufl. $-1^{15}/_{26}$ u. ${}^{4}/_{65}$.

102. M. 97*. Die Gll. der drei Seiten eines Dr lauten: $13x - 3y + 50 = 0$, $-7x + 13y + 30 = 0$, $3x + 5y - 34 = 0$. Die Tangenten der W. zwischen den Mittellinien zu best. Aufl. $-\frac{111}{67}$; $-\frac{111}{97}$; $-\frac{222}{71}$ (für die W. zwischen den größeren Abschnitten).

103. O. 91. Ein Dr. hat die Ecken (—3, 6), (11, 4), (9, — 8). Welche W. bilden die Mittellinien mit der x Achse u. welches sind die Koord. des Schwerp.? Aufl. 148° 23′ 32″, 32° 0′ 19″; 111° 2′ 16″; $5^{2}/_{3}$, ${}^{2}/_{3}$.

104. O. 93. Die Ecken eines Dr. sind (3, 8), (9, 4), (5, — 6). Die Längen der 3 Mittellinien u. die Tangente eines W. zu best., welchen eine der 3 Mittell. mit der zugehörigen Seite bildet. Aufl. $\sqrt{97}$, $\sqrt{34}$, $\sqrt{145}$; $\frac{38}{37}$. $\left(\frac{19}{8}; \frac{38}{21}.\right)$

105. O. 93*. Die Gll. der Seiten eines Dr. lauten: $5x - 2y = 37$; $7x + y = 29$; $2x + 3y = 30$. Die Koord. der Ecken, die Gll. u. Längen der Höhen zu best. Aufl. (3, 8), (9, 4), (5, — 6); $2x + 5y = 46$; $x - 7y = -19$; $3x - 2y = 27$; $38 : \sqrt{29}$; $-38 : \sqrt{50}$; $38 : \sqrt{13}$.

106. O. 96*. Ein Dr. hat die Spitze (10, 20); die Höhenfußp., welche auf den von der Spitze ausgehenden Seiten liegen, sind (12, 16) u. (5, 15). Wie groß ist die Fläche des Dr.? Aufl. 150.

107. M. 84. In einem Dr. sind die rw. Koord. der Mitten der Dreieckseiten 6,9; 3,8; 5,6. Die Koord. eines Höhenfußp. zu finden. Aufl. 6,9. (Die andern: 3,2 u. 8,6; 5,6 u. 6,2).

108. M. 97. Auf der Geraden $2x - 3y + 22 = 0$ einen P. zu best., welcher von den Geraden $4x - 3y = 48$ u. $12x + 5y = 60$ entgegengesetzt gleiche Abstände hat. Aufl. (10,14). Die Abstände sind ± 10.

109. M. 98*. Auf der Geraden $2x - 3y + 21 = 0$ einen P. zu best., der von den Geraden $4x - 3y = 47$ u. $12x + 5y = 43$ entgegengesetzt gleiche Abstände hat. Aufl. (9,13). Die Abstände sind ± 10.

110. M. 93. Die Koord. desjenigen P. zu finden, der von den Geraden $3x + 4y = 48$, $12x - 5y = -60$, $3x - 4y = 48$ gleichen Abstand hat. Wie groß ist dieser Abstand? Aufl. $3^{3}/_{11}$, 0; $7^{7}/_{11}$.

111. M. 89. Ein Dr. hat die Ecken (48, 18), (0, 32), (— 36, — 45). Die Koord. des Mittelp. des Innenkr. zu ber. Aufl. $9^{1}/_{2}$, 11. (Halbm. = $17^{1}/_{2}$.)

112. M. 94*. Es sind 3 P. geg.: A $(-2, -{}^{1}/_{3})$; B $(23, -10^{3}/_{4})$; C (2, 5). Die Koord. desjenigen P. zu finden, dessen Entf. von den Geraden BC, CA, AB sich wie 52 : 39 : 24 verhalten. Aufl. 2, 0. (Die Abstände sind 4, 3, $1^{11}/_{13}$.)

113. M. 02. Die Gll. der Seiten eines Dr. sind $4x + 5y + 33 = 0$, $11x + 2y - 62 = 0$, $3x - 8y + 60 = 0$. Die Gll. der 3 Mittellote der Seiten u. die Koord. ihres Schnittp. zu best.

Aufl. $5x - 4y = 10$; $2x - 11y = 34$; $8x + 3y = -14$; $-{}^{26}/_{47}$ u. $-3{}^{9}/_{47}$.

114. M. 84. In einem Dr. sind die rw. Koord. der Ecken x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3. Es sind die Gll. der Mittellote der Seiten zu suchen. Ferner aus den Gll. zu beweisen, daß die Mittellote durch einen P. gehen.

Aufl. $2x(x_2 - x_3) + 2y(y_2 - y_3) = x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2$; u. s. w.

115. M. 00. Ein Dr. hat die Ecken (4, 5), (— 6, 10), (— 12, — 10). Die Gll. für die Mittellote der Seiten u. die Koord. für den Mittelp. des Umkr. zu best.

Aufl. $3x + 10y + 27 = 0$; $32x + 30y + 203 = 0$; $4x - 2y + 19 = 0$; $-5{}^{7}/_{23}$ u. $-1{}^{5}/_{46}$.

116. M. 95*. Die Gll. der Seiten eines Dr. sind: $2y - x - 1 = 0$, $y - 3x + 2 = 0$, $y + 2x - 13 = 0$. Welches ist die Gl. des Umkreises? Aufl. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$.

117. M. 01. Die Seiten eines Dr. haben die Gll.: $10x - 3y + 90 = 0$, $15x - 16y + 20 = 0$, $x + 2y - 14 = 0$. Die Gl. des Umkr. zu best.

Aufl. $23x^2 + 23y^2 + 244x + 51y = 2174$.

118. M. 97. Auf dem Kr. $x^2 + y^2 - 10x - 6y = 2$ einen P. zu best., welcher von der Geraden $3x + 4y = 66$ den Abstand + 3 hat. Aufl. 1) (5, 9); 2) (10,76; 4,68).

119. M. 02*. Auf dem Kr., dessen Halbm. = 10 ist u. der den Mittelp. (2, 3) hat, einen P. zu best., welcher von den Geraden $14x - 5y - 120 = 0$ u. $5x - 14y + 177 = 0$ gleichen Abstand hat.

Aufl. 1) (8, 11); 2) (— 6, — 3). (Die Abstände sind $63 : \sqrt{221}$ u. $189 : \sqrt{221}$.)

120. M. 01*. Unter welchem W. schneidet die Gerade $x + y = 15$ den Kreis $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 36$? Aufl. 45°.

121. O. 01. 2 P. liegen auf der Geraden $ax + by = 2ab$ so, daß die von ihnen aus an den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ gezogenen Tangenten = b sind. Die Koord. der P. zu best. Aufl. b, a; $b(3a^2 - b^2) : (a^2 + b^2)$, $a(3b^2 - a^2) : (a^2 + b^2)$.

122. O. 99. 2 P. liegen auf der Geraden $ax + by = c^2$ so, daß die von ihnen aus an den Kr. $x^2 + y^2 = r^2$ gezogenen Tangenten gleich t sind. Die Koord. der P. zu best. Aufl. $(ac^2 + bR) : (a^2 + b^2)$ u. $(bc^2 - aR) : (a^2 + b^2)$; $R = \pm\sqrt{(a^2 + b^2)(r^2 + t^2) - c^4}$.

123. O. 94. Die Gll. der beiden Geraden zu finden, welche der Geraden $y = 3x$ parallel gehen und den Kreis $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 45 = 0$ berühren.

Aufl. $y = 3x - 9 \pm 4\sqrt{10}$.

124. M. 95. Den geom. Ort für die P. zu best., deren Entf. von den festen P. A u. B ein festes Verh. m : n haben. (Mit Koordinatengeom. zu lösen.)

Aufl. $\left(x - \frac{c(m^2 + n^2)}{m^2 - n^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4c^2m^2n^2}{(m^2 - n^2)^2}$; (AB = 2c.)

125. M. 99. Die Fläche eines Dr. ist = 31; zwei seiner Ecken sind (4, —5) u. (9, 6). Die dritte Ecke liegt auf der Parabel $y^2 = 28x$. Die Gl. der durch diese Ecke gehenden Tangente zu finden. Aufl. 1) $x - y + 7 = 0$; 2) $121x + 11y + 7 = 0$.

1*) u. 2*) $-847x + 11y(35 \pm 4\sqrt{707}) = 7(1791 \pm 40\sqrt{707})$.*)

) Bei 1) u. 2*) wird aber bei der angegebenen Reihenfolge der Ecken die Fläche = — 31.

126. O. 95. Welchen W. bilden die Kurven $y^2 = 8x$ u. $x^2 + y^2 - 46x + 360 = 0$ miteinander? Aufl. 1) $4^0\ 11'\ 6''$; 2) $4^0\ 12'\ 22''$.

127. O. 84*. Um ein Dr., dessen Seiten = 13, 14 u. 15 sind, wird eine Parabel beschr., deren Achse auf der mittleren Seite senkr. steht. Unter welchem W. schneidet diese Seite die Kurve? Aufl. $75^0\ 0'\ 18''$. ($\tan x = {}^{56}/_{15}$.)

128. M. 99. Wie groß ist die Sehne, welche die Parabel $y^2 = 36x$ von der Geraden $6x - 5y + 36 = 0$ abschneidet? Aufl. $\sqrt{61}$.

129. M. 99*. Die Gerade $2y = 3x + 2$ berührt die Parabel $y^2 = 2px$. Wie groß sind die Koord. des Berührungsp. u. p? Aufl. ${}^2/_3$, 2; 3.

130. O. 97. Auf der Parabel $y^2 = 2px$ einen P. so zu best., daß von ihm aus der Parameter (2p) unter einem geg. W α ($\tan\alpha = 0{,}8$) erscheint. Aufl. p, $p\sqrt{2}$.

131. O. 02. In der Parabel $y^2 = 2px$ wird senkrecht zu ihrer Achse eine Sehne gezogen. Das abgeschnittene Parabelsegment ist ebensogroß wie der Halbkr. über der Sehne. Unter welchem W. schneiden sich die Parabel u. der Kr. an den Endp. des Durchm.?

Aufl. $\delta = 22^0\ 59'\ 49''\ \left(\tan\delta = \frac{4}{3\pi}\right)$.

[Am andern Schnittp. $\delta_1 = 19^0\ 19'\ 39''\ \left(\tan\delta_1 = \frac{4\sqrt{9\pi^2 - 64}}{9\pi^2 - 32}\right)$.]

132. O. 98. Die Parabel $144x^2 - 120xy + 25y^2 + 234x - 1196y + 1690 = 0$ durch Umwandlung der Koord. auf die Scheitelgl. zu bringen.

Aufl. ($y_1{}^2 - 6x_1{}^2 - 4y_1{}^2 + 10 = 0$.) $y_{11}{}^2 = 6x_{11}$.

133. O. 93. Die Leitlinie u. den Brennp. der Parabel

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 18x - 34y + 186 = 0$$

zu best. Aufl. $2x + y = 8$; (5, 5).

134. O. 02. Die Fläche einer Ellipse ist $k^2\pi$ u. die Fläche des einbeschr. Quadrats $4m^2$. Wie groß sind die Achsen? Aufl. $\frac{k}{m}\cdot\left(\sqrt{k^2 + 2m^2} \pm \sqrt{k^2 - 2m^2}\right)$.

135. O. 03. Der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist ein Sechseck einbeschr., das lauter gleiche Seiten hat, u. wovon 2 Gegenecken in den Endp. der kleinen Achse liegen. Wie groß ist die Seite des Sechsecks? Aufl. 1) $2b\,(a^2 + b^2) : (a^2 + 3b^2)$; 2) 2b; hier fallen vom Sechseck 123456 die Ecken 1, 3, 5 zusammen, u. ebenso 2, 4, 6.

136. M. 96*. Unter welchem W. schneiden sich die Gerade $x - 4y + 2 = 0$ u. die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$? Aufl. 1) $75^0\ 57'\ 49''$; 2) $34^0\ 35'\ 31''$.

137. O. 95. In der Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 5625$ ist ein Halbm. gezogen, der mit der positiven x Achse $9^0\ 55'\ 35''$ bildet. Welchen W. bildet dieser Halbm. mit der Ellipse? Aufl. $74^0\ 0'\ 5''$.

138. O. 03*. 2 Leitstrahlen der Ellipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ treffen sich in einem P. der Kurve u. bilden 45^0 miteinander. Die Koord. dieses P. zu best.

Aufl. $\frac{5}{3}\sqrt{32\sqrt{2} - 39}$ u. $\frac{16}{3}(\sqrt{2} - 1)$.

139. O. 96. Unter welchem W. schneiden sich die Kurven $25x^2 + 64y^2 = 40000$ u. $3y^2 = 50x$? Aufl. $47^0\ 44'\ 5''$.

140. O. 87. 2 Ellipsen haben die Lage der Hauptachsen ($2a$ u. $2b$ bei der einen, $2a_1$ u. $2b_1$ bei der andern) gemeinsam. Es soll die Tangente des W. gefunden werden, unter dem sich die Ellipsen schneiden. Aufl. $\tan\delta = \dfrac{(a^2b_1^2 - a_1^2b^2)\sqrt{a^2 - a_1^2}\sqrt{b_1^2 - b^2}}{aa_1\,bb_1\,(a^2 - a_1^2 - b^2 + b_1^2)}$.

141. O. 01. Von den P. (13, 0) u. (20, 0) werden Tangenten an einen Quadranten der Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 576$ gelegt. Welchen W. bilden die Tangenten? Aufl. $31^0\ 25'\ 46''$. ($95^0\ 26'\ 25''$, wenn die Tang. an verschiedene Quadranten gezogen werden.)

142. O. 01*. Wie groß sind die Halbachsen a u. b der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, wenn sie die Gerade $px + qy + r^2 = 0$ berührt? Die Brennweite ist $= 2c$ gegeben. Aufl. $a^2 = (r^4 + c^2q^2) : (p^2 + q^2)$; $b^2 = (r^4 - c^2p^2) : (p^2 + q^2)$.

143. O. 03. Welcher Gl. müssen i, k u. l genügen, wenn die Gerade $ix + ky + l = 0$ die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ berühren soll? Aufl. $a^2i^2 + b^2k^2 = l^2$.

144. O. 02*. An die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ werden 2 Tangenten gezogen, die auf der Geraden $ix + ky + l = 0$ senkr. stehen. Welches sind die Gll. der Tangenten? Wie groß sind die Koord. der Berührungsp.?

Aufl. $kx - iy + \lambda = 0$; $-\dfrac{a^2k}{\lambda}$ u. $\dfrac{b^2i}{\lambda}$; $\lambda = \pm\sqrt{a^2k^2 + b^2i^2}$.

145. O. 99. Um die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ wird ein Rhombus beschr. Die Scheitel der spitzen W. liegen auf der großen Achse u. die Diag. verh. sich wie 5 : 4. Wie groß sind die Koord. der Berührungsp.? Aufl. 4 u. $1^4/_5$.

146. O. 87. Eine Ellipse hat die Gl. $9x^2 + 16y^2 = 144$. Wie lang ist die Sehne, welche auf der Polare des P. (16,9) liegt? Aufl. $\dfrac{96}{25}\sqrt{3}$.

147. O. 99*. Die Gll. der Tangenten vom P. (6,4) an die Ellipse $25x^2 + 64y^2 = 1600$ zu finden. Aufl. 1) $3x + 14y = 74$; 2) $3x + 2y = 26$.

148. M. 90. Wie groß ist c, wenn die Gerade $3x + 4y = 12$ eine Tangente der Ellipse $9x^2 + 4y^2 = c$ ist? Aufl. 28,8. (Die Achsen sind $8 : \sqrt{5}$ u. $12 : \sqrt{5}$.

149. O. 85. Über derselben Basis (112 cm) stehen Dreiecke, deren beide andern Seiten eine unveränderliche Summe (130 cm) haben. Es soll nachgewiesen werden, daß der geom. Ort für die Mitte der Innenkr. eine Ellipse ist. Aufl. Die Achsen sind = 112 u. $30^6/_{11}$ (cm).

150. O. 00. Parallel zu einer Geraden, die den Anfangsp. der Koord. mit dem P. (4, 3) verbindet, ist eine Tangente an die Hyperbel $4x^2 - 9y^2 = 36$ gezogen. Wie groß sind die Koord. der Berührungsp.? Aufl. $\pm 27 : \sqrt{17}$ u. $\pm 16 : \sqrt{17}$.

151. O. 97*. An die Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ wird eine Tangente gelegt, die mit der xAchse den W. φ bildet ($\tan\varphi = t$). Die Koord. des Berührungsp. zu best. Aufl. $\pm a^2t : r$; $\pm b^2 : r$; $r = \sqrt{a^2t^2 - b^2}$.

152. O. 98*. An die Kurve $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y = 81$ werden Tangenten parallel zur Geraden $x - 2y = 0$ gezogen. Die Koord. der Berührungsp. zu finden. Aufl. $1 \pm 3\sqrt{1/_5}$ u. $1 \mp 6\sqrt{1/_5}$. (Die Tang. sind $x - 2y = -1 \pm 3\sqrt{5}$.

153. O. 89. Vom P. ($\alpha = 3$, $\beta = 3$) werden Tangenten an den Kegelschnitt $3x^2 + 2xy - 24x + 24y = 0$ gelegt. Wie groß ist das durch den P. ($\alpha\,\beta$) u. die beiden Berührungsp. best. Dreieck? Aufl. 12.

154. O. 85*. Welchen W. bilden die vom Anfangsp. der Koord. an die Ellipse $3x^2 + 8xy + 9y^2 - 12x - 24y + 15 = 0$ gezogenen Tangenten? Aufl. 90^0.

155. O. 90*. Eine Parabel berührt die Koordinatenachsen in den Schnittp. der Geraden $3x + 4y = 12$. Den Parameter (2p) der Parabel zu best.
Aufl. 4,608. (Gl. der Parabelachse: $y = \frac{3}{4}x + 0{,}84$.)

156. O. 90. Ein Kegelschnitt berührt die yAchse im Anfangsp. u. geht durch die P. (5,0), (3,3), (6,3). Es soll die Lage der Hauptachsen best. werden. Aufl. Ihre Gll. sind $14x - 28y = 15$ u. $4x + 2y = 15$; ihre Längen sind $\frac{15}{14}\sqrt{42}$ u. $\frac{15}{7}\sqrt{3}$.

157. O. 89*. Von 2 projektiven Strahlbüscheln haben 3 Strahlen des ersten die Gll.: $3x + 2y = 10$, $x + y = 5$, $x + 2y = 10$; die entspr. Strahlen des andern haben bezw. die Gll.: $x + 2y = -2$, $3x + 8y = 0$, $x + 6y = 10$. Es soll der geom. Ort für die Schnittp. der vierten entsp. Strahlen best. werden. Aufl. $x^2 + 4y^2 = 100$.

II. Trigonometrie.

158. O. 00. Die Summe
$$2\sin 3\alpha \sin\alpha + 2\sin 3\alpha \sin 4\alpha + 2\sin 3\alpha \sin 7\alpha + \ldots + 2\sin 3\alpha \sin 25\alpha$$
in ein Produkt von trig. Funktionen zu verwandeln. Aufl. $4\cos\frac{3}{2}\alpha \cdot \sin 13\alpha \cdot \sin 13\frac{1}{2}\alpha$.

159. O. 84. Wenn man ρ, ρ_a, ρ_b und ρ durch α, β, γ u. r ausdrückt und die erhaltenen Ausdrücke in $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}$ einsetzt, so ergiebt sich eine goniom. Formel für die Kotangenten der halben Dreiecksw. Wie heißt sie und wie wird sie ohne die obige Gl. bewiesen? Aufl. $\cot\alpha/_2 \cot\beta/_2 \cot\gamma/_2 = \cot\alpha/_2 + \cot\beta/_2 + \cot\gamma/_2$.

160. M. 95*. $a + b + c = 128$; $r = 26\frac{9}{16}$; $\gamma = 78^0\ 11'\ 16''$; a? b? c?
Aufl. $a = 51$; $b = 25$; $c = 52$. ($F = 624$; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$; $\beta = 28^0\ 4'\ 21''$.)*)

161. M. 91*. $a + b = 71$; $h_a + h_b = 42{,}6$; $r = 30\frac{5}{6}$.
Aufl. $\alpha = 124^0\ 12'\ 20''$; $\beta = 18^0\ 55'\ 29''$; $\gamma = 36^0\ 52'\ 12''$;
$a = 51$; $b = 20$; $c = 37$; $F = 306$.**)

162. O. 95*. $a + b - c = 186$; $\rho = 9$; $F = 1116$.
Aufl. $a = 120$; $b = 97$; $c = 31$; $\alpha = 132^0\ 4'\ 30''$;
$\beta = 36^0\ 52'\ 12''$; $\gamma = 11^0\ 3'\ 18''$.

163. O. 91. $c = 77$; $\rho = 10\frac{1}{2}$; $\gamma = 87^0\ 20'\ 8''$; F?
Aufl. $F = 924$. ($a = 74$; $b = 25$; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$; $\beta = 18^0\ 55'\ 29''$.)

164. M. 78. $c = 2109$; $r = 3422{,}5$; $\rho = 333$; α? β? γ?
Aufl. $\alpha = 143^0\ 7'\ 48''$; $\beta = 18^0\ 55'\ 29''$; $\gamma = 17^0\ 56'\ 43''$.
($a = 4107$; $b = 2220$; $F = 1\ 404\ 594$.)

165. M. 77*. $\rho = 8$, $a + b + c = 84$, $\gamma = 67^0\ 22'\ 48''$.
Aufl. $\alpha = 59^0\ 29'\ 23''$, $\beta = 53^0\ 7'\ 48''$; $a = 28$, $b = 26$, $c = 30$.

---

*) Bei der ursprünglichen Fassung der Aufgaben fehlte die Angabe der Maßeinheiten, wo sie hingehörte, keineswegs. Auch wurden die Schüler veranlaßt, die Figuren nach den gegebenen Maßen zu zeichnen. Bei angemessener Verkleinerung war ihr Maßstab anzugeben.

**) Bei dieser und ähnlichen Aufgaben kann auch a mit b, und demgemäß α mit β vertauscht werden. Dies ist in späteren Fällen nicht mehr besonders bemerkt.

166. M. 76. $c = 30$; $\rho = 8$; $F = 336$.
Aufl. $\alpha = 59^0\ 29'\ 23''$; $\beta = 53^0\ 7'\ 48''$; $\gamma = 67^0\ 22'\ 48''$; $a = 28$; $b = 26$.
167. M. 84*. $F = 264$; $a + b = 52$; $\rho_c = 66$.
Aufl. $\alpha = 53^0\ 7'\ 48''$; $\beta = 18^0\ 55'\ 29''$; $\gamma = 107^0\ 56'\ 43''$; $a = 37$; $b = 15$; $c = 44$.
168. D. 85. $h_c = 156$; $\rho_a = 234$; $F = 21\,294$.
Aufl. $\alpha = 67^0\ 22'\ 48''$; $\beta = 36^0\ 52'\ 12''$; $\gamma = 75^0\ 45'\ 0''$;
$a = 260$; $b = 169$; $c = 273$.
169. D. 89. $r = 422{,}5$; $\gamma = 67^0\ 22'\ 48''$; $h_a + h_b = 1224$; a? b? c?
Aufl. $a = 819$; $b = 507$; $c = 780$. ($\alpha = 75^0\ 45'\ 0''$; $\beta = 36^0\ 52'\ 12''$; $F = 191\,646$.)
170. M. 86. $\gamma = 87^0\ 20'\ 8''$; $\rho_a = 61{,}050$; $h_b - h_a = 45{,}276$.
Aufl. $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$; $\beta = 18^0\ 55'\ 29''$; $a = 68{,}450$; $b = 23{,}125$;
$c = 71{,}225$; $F = 790{,}60$.
171. M. 85. $a + b = 244$; $\rho + \rho_c = 112$; $\rho_a - \rho_b = 161^3/_{14}$.
Aufl. $\alpha = 98^0\ 47'\ 51''$; $\beta = 31^0\ 53'\ 27''$; $\gamma = 49^0\ 18'\ 42''$;
$a = 159$; $b = 85$; $c = 122$; $F = 5124$.
172. M. 75*. $h_a = 12^{12}/_{13}$; $h_b = 12$; $\gamma = 67^0\ 22'\ 48''$. a? b? c?
Aufl. $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. $\alpha = 53^0\ 7'\ 48''$; $\beta = 59^0\ 29'\ 23''$; $F = 84$.)
173. D. 83. $(\beta + \gamma) : (\gamma + \alpha) : (\alpha + \beta) = 5 : 6 : 7$; $h_a + h_b + h_c = 10$;
h_a? h_b? h_c? Aufl. 2, 7254; 3, 0991; 4, 1755.
174. D. 79*. $a : b : c = 25 : 29 : 36$; $\rho = 232$. Aufl. $\alpha = 43^0\ 36'\ 10''$;
$\beta = 53^0\ 7'\ 48''$; $\gamma = 83^0\ 16'\ 2''$; $a = 725$; $b = 841$; $c = 1044$; $F = 302\,760$.
175. M. 79. $\gamma = 30^0\ 30'\ 37''$; $h_a : h_b = 13 : 20$; $\rho_a + \rho_b = 524^1/_3$.
Aufl. $\alpha = 112^0\ 37'\ 12''$; $\beta = 36^0\ 52'\ 12''$; $a = 260$; $b = 169$; $c = 143$; $F = 11\,154$.
176. M. 81*. $F = 14196$; $a : \rho = 13 : 4$; $\sin \alpha = ^4/_5$; $\alpha < ^1/_2\pi$.
Aufl. $\alpha = 53^0\ 7'\ 48''$; $\beta = 67^0\ 22'\ 48''$; $\gamma = 59^0\ 29'\ 23''$; $a = 169$; $b = 195$; $c = 182$.
177. D. 92. $\rho_a = 60$; $\rho_b = 12$; $\rho_c = 2^1/_2$; α? β? γ? Aufl. $\alpha = 126^0\ 52'\ 12''$;
$\beta = 43^0\ 36'\ 10''$; $\gamma = 9^0\ 31'\ 38''$. ($a = 29$; $b = 25$; $c = 6$; $F = 60$.)
178. D. 89*. $\rho_a = 168$; $\rho_b = 56$; $\rho_c = 129^1/_2$; α? β? γ?
Aufl. $\alpha = 81^0\ 12'\ 9''$; $\beta = 31^0\ 53'\ 27''$; $\gamma = 66^0\ 54'\ 24''$; $a = 159$; $b = 85$;
$c = 148$; $F = 6216$.
179. M. 75. $a + b - c = 12$; $\beta - \alpha = 6^0\ 21'\ 34''$; $\rho = 4$. a? b? c?
Aufl. $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.
180. M. 96. $a - b = 74$; $\gamma = 49^0\ 18'\ 42''$; $\rho + \rho_c = 112$; c?
Aufl. $c = 122$. ($a = 159$; $b = 85$; $F = 5124$; $\alpha = 98^0\ 47'\ 51''$; $\beta = 31^0\ 53'\ 27''$.)
181. D. 80*. $\gamma = 102^0\ 1'\ 5''$; $a + b = 11169$; $\rho_a - \rho_b = 413^2/_3$.
Aufl. $\alpha = 41^0\ 6'\ 44''$; $\beta = 36^0\ 52'\ 12''$; $a = 5840$; $b = 5329$; $c = 8687$;
$F = 15\,219\,624$.
182. M. 86. $h_c = 24$; $\rho_c = 84$; $\delta = 54^0\ 48'\ 54^1/_2''$.*) Aufl. $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$;
$\beta = 18^0\ 55'\ 29''$; $\gamma = 87^0\ 20'\ 8''$; $a = 74$; $b = 25$; $c = 77$; $F = 924$.
183. M. 90. $a + b = 54$; $\rho_a = 24$; $\rho_b = 8$; c?
Aufl. $c = 46, 3465$. ($a = 38, 588$; $b = 15\ 414$; $F = 278, 079$;
$\alpha = 51^0\ 7'\ 42''$; $\beta = 18^0\ 7'\ 8''$; $\gamma = 110^0\ 45'\ 11''$.)

*) $\delta = \alpha - \beta$.

184. D. 83. $a + b + c : \rho_c = 7 : 2$; $\sin \delta = {}^{16}/_{65}$; $\varrho = 104$; F?
Aufl. $F = 56784$. ($a = 390$; $b = 338$; $c = 364$.)

185. M. 93. $a + b = 153$; $r = 60^5/_6$; $\delta = 4^0\ 14'\ 32''$; c?
Aufl. $c = 119$. ($a = 80$; $b = 73$; $F = 2856$; $\alpha = 41^0\ 6'\ 44''$; $\beta = 36^0\ 52'\ 12''$; $\gamma = 102^0\ 1'\ 5''$.)

186. D. 94*. $a - b = 38$; $p - q = 45^3/_5$; $r = 30^5/_{14}$; h_c?
Aufl. $h_c = 15, 4$. ($a = 55$; $b = 17$; $c = 60$; $F = 462$; $\alpha = 64^0\ 56'\ 33''$; $\beta = 16^0\ 15'\ 37''$; $\gamma = 98^0\ 47'\ 51''$.)

187. M. 89. $r = 32,5$; $\rho + \rho_c = 77$; $\delta = 30^0\ 30'\ 36,8''$; a? b? c?
Aufl. $a = 60$; $b = 39$; $c = 63$. ($\alpha = 67^0\ 22'\ 48''$; $\beta = 36^0\ 52'\ 12''$; $\gamma = 75^0\ 45'\ 0''$; $F = 1134$.)

188. D. 83*. $a + b - c = 182$; $\rho = 52$; $\sin \alpha : \sin \beta = 1^{47}/_{65}$; r?
Aufl. $r = 105^5/_8$. ($\alpha = 67^0\ 22'\ 48''$; $\beta = 53^0\ 7'\ 48''$; $\gamma = 59^0\ 59'\ 23''$; $a = 195$; $b = 169$; $c = 182$; $F = 14196$.)

189. M. 83*. $a - b = 17$; $\rho + \rho_c = 646$; $7 \sin \gamma + 8 \cos \gamma = {}^4/_5$; α? β? γ?
Aufl. $\alpha = 28^0\ 4'\ 21''$; $\beta = 25^0\ 3'\ 27''$; $\gamma = 126^0\ 52'\ 12''$; ($a = 170$; $b = 153$; $c = 289$; $F = 10404$.)

190. D. 93. $a : b = 51 : 25$; $h_c = 24$; $r = 26^9/_{16}$; F?
Aufl. $F = 624$. ($a = 51$; $b = 25$; $c = 52$; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$; $\beta = 28^0\ 4'\ 21''$; $\gamma = 78^0\ 11'\ 16''$.)

191. M. 86*. $r = 38^{13}/_{24}$; oberer Abschnitt von $h_c = 21\,^7/_{12}$, unterer $= 3^{173}/_{444}$.
Aufl. $\alpha = 87^0\ 20'\ 8''$; $\beta = 18^0\ 55'\ 29''$; $\gamma = 73^0\ 44'\ 23''$; $a = 77$; $b = 25$; $c = 74$; $F = 924$.

192. M. 89. $r = 87,6042$; $h_c = 28,8$; $w_c = 36$; a? b? c? Aufl. $a = 174$; $b = 29$; $c = 175$. ($F = 2520$; $\alpha = 83^0\ 16'\ 1''$; $\beta = 9^0\ 31'\ 38''$; $\gamma = 87^0\ 12'\ 20''$.)

193. D. 87*. $c = 175$; $w_c = 36$; $a : b = 6 : 1$. Aufl. $\alpha = 83^0\ 16'\ 1''$; $\beta = 9^0\ 31'\ 38''$; $\gamma = 87^0\ 12'\ 20''$; $a = 174$; $b = 29$; $F = 2520$.

194. D. 86. $c = 5589$; $h_c = 1620$; $a : b = 29 : 52$. Aufl. $\alpha = 22^0\ 37'\ 12''$; $\beta = 43^0\ 36'\ 10''$; $\gamma = 113^0\ 46'\ 38''$; $a = 2349$; $b = 4212$; $F = 4\,527\,090$.

195. D. 84. $a + b = 244$; $h_c = 84$; $\delta = 49^0\ 18'\ 42^1/_2''$.
Aufl. $\alpha = 81^0\ 12'\ 9''$; $\beta = 31^0\ 53'\ 27''$; $\gamma = 66^0\ 54'\ 24''$; $a = 159$; $b = 85$; $c = 148$; $F = 6216$.

196. D. 82*. $h_c = 24$; $a - b = 32\sqrt{3}$; $\tan \delta/_2 = {}^1/_3$; γ? Aufl. $\gamma = 110^0\,29'14''$.

197. D. 98. $h_c = 24$; $\rho = 10^1/_2$; $\delta = 54^0\ 48'\ 54''$; a? b? c? Aufl. $a = 74$; $b = 25$; $c = 77$. ($F = 924$; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$; $\beta = 18^0\ 55'\ 29''$; $\gamma = 87^0\ 20'\ 8''$.)

198. M. 91. $h_c = 72$; $F = 684$; $\delta = 126^0\ 52'\ 12''$. Aufl. $\alpha = 151^0\ 55'\ 39''$; $\beta = 25^0\ 3'\ 27''$; $\gamma = 3^0\ 0'\ 54''$; $a = 170$; $b = 153$; $c = 19$.

199. M. 80*. $c = 21$; $h_c = 8$; $\delta = 25^0\ 3'\ 27''$. Aufl. $\alpha = 53^0\ 7'\ 48''$; $\beta = 28^0\ 4'\ 21''$; $\gamma = 98^0\ 47'\ 51''$; $a = 17$; $b = 10$; $F = 84$.

200. M. 84. $c = 51$; $r = 30^5/_6$; $F = 306$. Aufl. $\alpha = 36^0\ 52'\ 12''$; $\beta = 18^0\ 55'\ 29''$; $\gamma = 124^0\ 12'\ 20''$; $a = 37$; $b = 20$.

201. M. 82. $c : h_c = 75 : 56$; $\gamma = 67^0\ 22'\ 48''$; $a = 169$; $a < b$. Aufl. $\alpha = 53^0\ 7'\ 48''$; $\beta = 59^0\ 29'\ 23''$; $b = 182$; $c = 195$; $F = 14\,196$.

202. D. 97*. $h_c = 28{,}8$; $F = 2520$; $w_c = 36$; a? b? c?

Aufl. $2h \sin\gamma - c\cos\gamma = c\cos\delta$; $a = 174$; $b = 29$; $c = 175$. ($\alpha = 83^0\ 16'\ 1''$; $\beta = 9^0\ 31'\ 38''$; $\gamma = 87^0\ 12'\ 20''$.)

203. D. 87. $h_c = 72$; $p - q = k = 133$; $\gamma = 81^0\ 12'\ 9''$.

Aufl. $2h \sin\delta - k\cos\delta = k\cos\gamma$; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$; $\beta = 25^0\ 3'\ 27''$; $\gamma = 81^0\ 12'\ 9''$; $a = 170$; $b = 75$; $c = 175$; $F = 6300$.

204. M. 95. $p - q = m = 11$; $h_c = 12$; $\gamma = 75^0\ 45'\ 0''$; a? b? c?

Aufl. $2h \sin\delta - m\cos\delta = m\cos\gamma$; $a = 20$; $b = 13$; $c = 21$. ($F = 126$; $\alpha = 67^0\ 22'\ 48''$; $\beta = 36^0\ 52'\ 12''$.)

205. D. 87. $h_c = 14{,}4$; $p - q = k = 26{,}6$; $\delta = 48^0\ 40'\ 56''$.

Aufl. $2h \sin\delta - k\cos\delta = k\cos\gamma$; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$; $\beta = 25^0\ 3'\ 27''$; $\gamma = 81^0\ 12'\ 9''$; $a = 34$; $b = 15$; $c = 35$; $F = 252$.

206. M. 00*. $a + b = i = 99$; $\alpha = 67^0\ 22'\ 48''$; der Abstand der Seite b vom Mittelp. des Umkr. $m = 26$; a? b? Aufl. $i\cos\beta - 2m\sin\beta = 2m\sin\alpha$; $a = 60$; $b = 39$. ($c = 63$; $F = 1134$; $\beta = 36^0\ 52'\ 12''$; $\gamma = 75^0\ 45'\ 0''$.)

207. D. 96. $c = 35$; $\rho = 6$; $\delta = 48^0\ 40'\ 56''$; a? b?

Aufl. $2\rho\cos {}^1\!/_2\gamma + c\sin {}^1\!/_2\gamma = c\cos {}^1\!/_2\delta$; $a = 34$; $b = 15$. ($F = 252$; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$; $\beta = 25^0\ 3'\ 27''$; $\gamma = 81^0\ 12'\ 9''$.)

208. D. 90. $c = 19$; $\rho_c = 6$; $\delta = 124^0\ 12'\ 20''$; a? b?

Aufl. $2\rho_c\cos {}^1\!/_2\gamma - c\sin {}^1\!/_2\gamma = c\cos {}^1\!/_2\delta$; $a = 37$; $b = 20$. ($F = 114$; $\alpha = 143^0\ 7'\ 48''$; $\beta = 18^0\ 55'\ 29''$; $\gamma = 17^0\ 56'\ 43''$.)

209. D. 03. $c : \rho_a = 5 : 14$; $\delta = 45^0\ 40'\ 2''$; $F = 5376$; r?

Aufl. $5{,}6 \,.\, \sin {}^1\!/_2\gamma - \cos {}^1\!/_2\gamma = \sin {}^1\!/_2\delta$; $r = 85$. ($a = 168$; $b = 136$; $c = 80$; $\alpha = 98^0\ 47'\ 51''$; $\beta = 53^0\ 7'\ 48''$; $\gamma = 28^0\ 4'\ 21''$.)

210. D. 90. $a + b + c = 44$; $h_c = 12$; $\delta = 75^0\ 45'\ 0''$; F?

Aufl. $\sin {}^1\!/_2\gamma + {}^6\!/_{11}\cos {}^1\!/_2\gamma = \cos {}^1\!/_2\delta$; $F = 66$. ($a = 20$; $b = 13$; $c = 11$; $\alpha = 112^0\ 37'\ 12''$; $\beta = 36^0\ 52'\ 12''$; $\gamma = 30^0\ 30'\ 37''$.)

211. M. 93*. $a + b + c = 2s = 266$; $h_c = 84$; $\delta = 28^0\ 4'\ 22''$; F?

Aufl. $F = 3192$; $s \cdot \cos {}^1\!/_2\delta = h\cos {}^1\!/_2\gamma + s \cdot \sin {}^1\!/_2\gamma$. ($a = 105$; $b = 85$; $c = 76$; $\alpha = 81^0\ 12'\ 10''$: $\beta = 53^0\ 7'\ 48''$; $\gamma = 45^0\ 40'\ 2''$.)

212. M. 95. $a + b + c = m = 272$; $h_c = 48$; $\delta = 4^0\ 14'\ 32''$; r?

Aufl. $2h\cos {}^1\!/_2\gamma + m\sin {}^1\!/_2\gamma = m\cos {}^1\!/_2\delta$; $r = 60{}^5\!/_6$. ($a = 80$; $b = 73$; $c = 119$; $F = 2856$; $\alpha = 41^0\ 6'\ 44''$; $\beta = 36^0\ 52'\ 12''$; $\gamma = 102^0\ 1'\ 5''$.)

213. M. 01. $a + b - c = m = 18$; $h_c = 20$; $\delta = 9^0\ 31'\ 38''$; a? b? c?

Aufl. $2\,h\cos {}^1\!/_2\gamma - m\sin {}^1\!/_2\gamma = m\cos {}^1\!/_2\delta$; $a = 29$; $b = 25$; $c = 36$. ($F = 360$; $\alpha = 53^0\ 7'\ 48''$; $\beta = 43^0\ 36'\ 10''$; $\gamma = 83^0\ 16'\ 2''$.)

214. M. 92. $\gamma = 95^0\ 12'\ 18''$; $a + b = m = 217$; $\rho_a = 84$; a? b?

Aufl. $2\rho_a\cos {}^1\!/_2\delta - m\sin {}^1\!/_2\delta = m\cos {}^1\!/_2\gamma$; $a = 120$; $b = 97$. ($c = 161$; $F = 5796$; $\alpha = 47^0\ 55'\ 30''$; $\beta = 36^0\ 52'\ 12''$.)

215. D. 93*. $a - b = d = 26$; $\rho = 9{,}75$; $\gamma = 78^0\ 11'\ 16''$; c?

Aufl. $d\cos {}^1\!/_2\delta - 2\,\rho\sin {}^1\!/_2\delta = d\sin {}^1\!/_2\gamma$; $c = 52$. ($a = 51$; $b = 25$; $F = 624$; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$; $\beta = 28^0\ 4'\ 21''$.)

216. D. 01*. a — b = m = 23; $\gamma = 11^0\ 3'\ 18''$; $\rho_c = 12$; c?

Aufl. $2\rho_c \sin \frac{1}{2}\delta - m \cos \frac{1}{2}\delta = m \sin \frac{1}{2}\gamma$; c = 31. (a = 120; b = 97; F = 1116; $\alpha = 132^0\ 4'\ 30''$; $\beta = 36^0\ 52'\ 12''$.)

217. M. 90*. $\gamma = 60^0$; $\rho = 10$; $\rho_a - \rho_b = 9$; α? β?

Aufl. $18 \cos \frac{1}{2}\delta - 40\sqrt{3} \sin \frac{1}{2}\delta = 9$; $\alpha = 67^0\ 20'\ 2\underline{8}''$; $\beta = 52^0\ 39'\ 3\underline{2}''$. (a = 37, 52$\underline{7}$; b = 32, 33$\underline{0}$; c = 35, 21$\underline{7}$; F = 525, 3$\underline{7}$)

218. D. 00*. a + b — c = i = 22; $\rho_a - \rho_b = k = 51\frac{1}{3}$; $\gamma = 87^0\ 20'\ 8''$; a? b? c?

Aufl. $k \cos \frac{1}{2}\delta - i \sin \frac{1}{2}\delta = k \sin \frac{1}{2}\gamma$; a = 74; b = 25; c = 77. (F = 924; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$: $\beta = 18^0\ 55'\ 29''$.)

219. M. 93. $h_c - \rho = m = 60$; p — q = n = 50; $\gamma = 45^0\ 40'\ 2''$; α? β?

Aufl. $n \cos \frac{1}{2}\delta - 2m \sin \frac{1}{2}\delta = n \sin \frac{1}{2}\gamma$; $\alpha = 81^0\ 12'\ 10''$; $\beta = 53^0\ 7'\ 48''$. (a = 105; b = 85; c = 76; F = 3192.)

220. D. 97. p — q = k = 26,6; $h_c - \rho = i = 8{,}4$; $\delta = 48^0\ 40'\ 56''$; a?

Aufl. $k \cos \frac{1}{2}\delta - 2i \sin \frac{1}{2}\delta = k \sin \frac{1}{2}\gamma$; a = 34. (b = 15; c = 35; F = 252; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$; $\beta = 25^0\ 3'\ 27''$; $\gamma = 81^0\ 12'\ 9''$.)

221. D. 96*. a + b + c = m = 42; $w_c = 12{,}0932$; $\delta = 14^0\ 15'\ 0''$; h_c? c?

Aufl. $2w \cos \frac{1}{2}\delta \cos \frac{1}{2}\gamma + m \sin \frac{1}{2}\gamma = m \cos \frac{1}{2}\delta$; c = 14; h = 12. (a = 15; b = 13; $\alpha = 67^0\ 22'\ 48''$; $\beta = 53^0\ 7'\ 48''$; $\gamma = 59^0\ 29'\ 23''$.)

222. D. 92*. a — b = d = 74; $\gamma = 49^0\ 18'\ 42''$; $w_c = 100{,}679$; h_c?

Aufl. $2w \sin \frac{1}{2}\gamma \sin \delta - d \cos \delta = d \cos \gamma$; h = 84. ($\alpha = 98^0\ 47'\ 51''$; $\beta = 31^0\ 53'\ 27''$; a = 159; b = 85; c = 122; F = 5124.)

223. D. 90*. $\gamma = 120^0$; $w_c = 5$; $\rho_a = 7$; α? β?

Aufl. $\rho_a \sin \frac{1}{2}\delta + w_c \cos \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\delta = \rho_a \cos \frac{1}{2}\gamma$; $\alpha = 38^0\ 26'\ 1\underline{3}''$; $\beta = 21^0\ 33'\ 47''$. (a = 13, 45$\underline{7}$; b = 7, 956$\underline{2}$; c = 18, 74$\underline{7}$; F = 46, 362.)

224. M. 91. a + b = 244; $\rho + \rho_c = 161\frac{3}{14}$; $\alpha = 81^0\ 12'\ 9''$; a? b? c?

Aufl. a = 159; b = 85; c = 148. ($\beta = 31^0\ 53'\ 27''$; $\gamma = 66^0\ 54'\ 24''$; F = 6216.)

225. D. 94. $h_c = 24$; $\rho_a + \rho_b = 90\frac{1}{4}$; $\rho_c - \rho = 16$; α? β? γ?

Aufl. $\alpha = 106^0\ 15'\ 37''$; $\beta = 28^0\ 4'\ 21''$; $\gamma = 45^0\ 40'\ 2''$. (a = 51; b = 25; c = 38; F = 456.)

226. M. 98. F = 4056; $h_a h_b = 1996{,}8$; $\delta = 59^0\ 29'\ 23''$ a? b? c?

Aufl. a = 195; b = 169; c = 52. ($\alpha = 112^0\ 37'\ 12''$; $\beta = 53^0\ 7'\ 48''$; $\gamma = 14^0\ 15'\ 0''$.)

227. M. 98. F = 360; $\rho_a \rho_b = 405$; $\delta = 9^0\ 31'\ 38''$; a? b? c?

Aufl. a = 29; b = 25; c = 36. ($\alpha = 53^0\ 7'\ 48''$; $\beta = 43^0\ 36'\ 10''$; $\gamma = 83^0\ 16'\ 2''$.)

228. D. 02*. $\delta = 98^0\ 22'\ 12''$; $h_a h_b = 38{,}4$; $\rho_a \rho_b = 48$; a? b? c?

Aufl. a = 15; b = 4; c = 13. (F = 24; $\alpha = 112^0\ 37'\ 12''$; $\beta = 14^0\ 15'\ 0''$; $\gamma = 53^0\ 7'\ 48''$.)

229. M. 79*. $\rho = 20{,}8467$; ab = 5323,98; a + b + c = 222,172.

Aufl. $\alpha = 70^0$, $\beta = 50^0$, $\gamma = 60^0$; a = 80, 81$\underline{4}$; b = 65, 88$\underline{0}$; c = 74, 47$\underline{8}$; F = 2305, 35.

230. M. 00. c = 35; $h_c = 14{,}4$; $\rho\rho_c = 216$; a? b? Aufl. a = 34; b = 15. (F = 252; $\alpha = 73^0\ 44'\ 23''$; $\beta = 25^0\ 3'\ 27''$; $\gamma = 81^0\ 12'\ 9''$.)

231. O. 02. abc = 4350; $\rho_a\ \rho_b\ \rho_c = 1800$; $\gamma = 43^0\ 36'\ 10''$; α? β?
Aufl. $\alpha = 126^0\ 52'\ 12''$; $\beta = 9^0\ 31'\ 38''$. (a = 29; b = 6; c = 25; F = 60.)

232. M. 02. rF = 715; $\varrho\ \varrho_a\ \varrho_b = 726$; $\gamma = 30^0\ 30'\ 36{,}8''$; α? β?
Aufl. $\alpha = 112^0\ 37'\ 12''$; $\beta = 36^0\ 52\ 12''$. (a = 20; b = 13; c = 11; F = 66.)

233. M. 96*. c = 44; a = 37; $\beta = 18^0\ 55'\ 28{,}7''$; auf BC liegt ein P. J so, daß W. CAJ = 32^0 ist. Wie groß ist AJ? Aufl. 22, 175.

234. O. 89. a = 159; b = 85; $\gamma = 66^0\ 54'\ 24''$. Wie groß ist die Strecke CF, welche AB nach (AF : FB =) 12 : 25 teilt? Aufl. 91.

235. O. 98*. In einem Kr. (Halbm. = 12) liegt eine Sehne = 18. Der größere der beiden zur Sehne gehörigen Bogen wird in 4 gleiche Teile geteilt. Wie weit ist die Mitte der Sehne von den Teilp. entfernt? Aufl. 19, 937; 16, 893.

236. M. 98*. In einem Dr. sind die auf den Seiten liegenden Berührungsp. des Innenkr. 25 cm, 29 cm u. 36 cm voneinander entfernt. Wie groß sind die Seiten?
Aufl. a = $177\ ^{71}/_{102}$; b = $170\ ^{565}/_{714}$; c = $41\ ^3/_7$ (cm). (F = $3533\ ^{73}/_{119}$; $\alpha = 92^0\ 47'\ 40''$; $\beta = 73^0\ 44'\ 23''$; $\gamma = 13^0\ 27'\ 57''$.)

237. O. 91*. Von einer Standlinie AB (= 2500 m) aus soll eine Strecke CD gemessen werden. Es ist W. BAC = 40^0, CAD = 60^0, ABD = 30^0, CBD = 54^0.
Aufl. 2600, 6 m.

238. M. 92. Von der Spitze eines Berges beobachtet man 2 P. der Meeresküste, die 15 km voneinander entfernt liegen. Ihre Verbindungsl. erscheint unter 60^0, der eine P. unter einem Depressionsw. von 10^0, der andere unter einem solchen von 12^0. Wie hoch ist der Berg? Aufl. 2804, 9 m.

239. M. 84. Die Ecken eines gewichtlosen starren rw. Dr. ABC sind durch Massen belastet, der Scheitel C des rechten W. durch 7 kg, A durch 4 kg u. B durch 5 kg. Die Kathete AC ist = 22 cm, BC = 36 cm Wie weit ist der Schwerp. des Massensystems von C entfernt? Aufl. $^1/_4\sqrt{2509} = 12{,}5225$ (cm).

240. M. 83. 3 Kräfte halten sich in einem P. das Gleichgewicht. Ihre Richtungen bilden miteinander die W. 115^0, 118^0 u. 127^0. Die größte der 3 Kräfte ist um 45 kg kleiner als die Summe der beiden andern. Wie groß ist jede Kraft? Aufl. 52, 605; 51, 249; 46, 354. (kg).

241. M. 85. 3 Kräfte P_1, P_2, P_3 halten sich in einem P. O das Gleichgewicht. Der W. P_1OP_2 ist = 126^0, $P_2OP_3 = 130^0$, $P_1OP_3 = 104^0$. Wie groß ist jede Kraft, wenn ihre Summe = 360 kg ist? Aufl. 108, 34; 137, 23; 114, 42 (kg).

242. M. 80. Der senkr. Durchschnitt eines dreikant. Glasprismas (Brechungsqu. = 1, 5) ist ein gleichsch. Dr. mit der Basis 14 cm u. dem Schenkel 25 cm. Ein Lichtstrahl geht in seiner Ebene von einem P. aus, der in der Verlängerung der Basis 20 cm von der Grundkante entfernt liegt. Der Strahl trifft das Prisma in der Mitte des Schenkels. Welche Richtung hat er beim Austritt aus dem Prisma? Aufl. Er entfernt sich von der Basis unter $8^0\ 17'\ 8''$.

243. M. 92*. Wie groß sind die Seiten eines Parallelogramms, wenn seine Fläche = 504 und seine Diag. = 40 u. 26 sind? Aufl. 21 u. 26,401.

244. M. 02*. Von einem Sehnenviereck kennt man: a = 29, b = 69, c = 27, $\beta = 43^0\ 36'\ 10''$; d? Aufl. d = 29. ($\alpha = 134^0\ 45'\ 37''$; e = 52; f = $53^7/_{13}$; F = 960.)

245. O. 77. Wie groß sind die Diag. eines Sehnenvierecks, wenn die zu den Seiten gehörigen Bogen des Umkr. = 3, 4, 5 u. 6 sind? Aufl. $\frac{18 \sin 70^0}{\pi} = 5,384\underline{0}$ u. $\frac{18}{\pi} = 5,729\underline{6}$. (Die W. sind 90^0, 110^0, 90^0, 70^0; die Seiten $2,864\underline{8}$; $3,682\underline{9}$; $4,389\underline{0}$; $4,961\underline{9}$; F = 15,190.)

246. O. 86. Von einem Viereck kennt man a = 275; b = 319; c = 333; d = 135; $\beta = 83^0\ 16'\ 1^1/_2''$; δ? F?

Aufl. $\delta = 107^0\ 56'\ 43''$; F = 64944. ($\alpha = 106^0\ 15'\ 37''$; f = 338,59.)

247. M. 99. Von einem Viereck kennt man a = 52, b = 56, c = 33, d = 39, $\delta = 112^0\ 37'\ 12''$; β? F?

Aufl. $\beta = 67^0\ 22'\ 48''$; F = 1938. ($\alpha = 90^0$; $\gamma = 90^0$; e = 60; f = 65.)

248. O. 99. Von einem Viereck kennt man: a = 260, b = 280, c = 165, d = 195, e = 300; f? Aufl. f = 325. ($\alpha = 90^0$; $\beta = 67^0\ 22'\ 48''$; $\gamma = 90^0$; $\delta = 112^0\ 37'\ 12''$.)

249. M. 99. Von einem Viereck kennt man: a = 145, d = 125, f = 180, $\beta = 59^0\ 51'\ 47''$, $\delta = 118^0\ 4'\ 21''$; b? c?

Aufl. b = 165; c = 51. ($\alpha = 83^0\ 16'\ 2''$; $\gamma = 98^0\ 47'\ 51''$; e = 155,64$\underline{7}$; F = 13 158.)

250. O. 85. Von einem Viereck kennt man: a = 14, b = 15, c = 20, d = 21; $\beta + \delta = 90^0$; β? δ? e? Aufl. $\beta = 53^0\ 7'\ 48''$; e = 13.

251. M. 01*. Die Seite eines rg. Siebenecks ist = a. Wie groß ist die größte Diag. desjenigen rg. Siebenecks, welches von den kleinsten Diag. des ersten gebildet wird? Aufl. a. 1,5549$\underline{6}$.

252. M. 97*. In einen Kr. (Fläche 240) wird ein rg. Siebeneck beschr. Von einer Ecke aus werden 2 ungleiche Diag. gezogen, die mit einer Vieleckseite ein Dr. bilden. Wie groß ist die Fläche dieses Dr. u. seines Innenkr.? Aufl. 50,52$\underline{9}$; 21,87$\underline{9}$.

253. O. 92. Unter 55^0 nördl. Br. wird ein Stern mit der Dekl. 25^0 beobachtet. Wie lange nach seiner obern Kulm. erreicht er eine Höhe von 35^0, u. welches ist dann sein Azimut? Aufl. $4^h\ 16^m\ 15^s$; $84^0\ 13'\ 5\underline{\underline{1}}'$ westl.

254. O. 99*. Wie lange nach ihrer Kulm. hat die Sonne (bei einer geogr. Br. von 55^0) eine Höhe von 38^0, wenn ihre Dekl. 17^0 beträgt? Und wie groß ist dann ihr Azimut? Aufl. $3^h\ 6^m\ 48^s$; $62^0\ 2'\ 4''$.

255. O. 01. Um wieviel Uhr (nach wahrer Sonnenzeit) wirft eine senkr. Stange von 3 m Höhe einen horizontalen Schatten von 12 m Länge, wenn die geogr. Br. 55^0 u. die Dekl. der Sonne -20^0 beträgt? Aufl. Um $11^h\ 3^m\ 3\underline{1}^s$ vorm. oder $12^h\ 56^m\ 2\underline{9}^s$ nachm.

256. O. 85*. Ein Stern hat die Dekl. $-6^0\ 2'\ 15''$ u. erreicht 3 Stunden vor seinem Durchgang durch den Meridian eine Höhe von $20^0\ 9'\ 24''$. Welches ist die geogr. Br. des Beobachtungsorts? Aufl. $52^0\ 30'\ 12''$.

257. M. 90. Ein Stern, dessen Dekl. 24^0 beträgt, hat 4 Stunden nach seiner obern Kulm. eine Höhe von 30^0. Wie groß ist die geogr. Br. des Beobachtungsorts?

Aufl. 1) $76^0\ 50'\ 5\underline{3}''$; 2) $6^0\ 31'\ 7''$.

258. O. 93. Unter welcher geogr. Br. hat ein Stern, dessen Dekl. 25^0 beträgt, $4^h\ 16^m\ 15^s$ nach seiner obern Kulm. eine Höhe von 35^0? Aufl. 1) $54^0\ 59'\ \underline{0}''$; 2) $38^0\ 41'\ \underline{0}''$.

259. O. 99. Unter welcher geogr. Br. hat ein Stern $3^h\ 6^m\ 48^2/_5{}^s$ nach seiner obern Kulm. eine Höhe von 38°, wenn seine Dekl. 17° beträgt? (2 Lös.) Aufl. 1) 55°; 2) —6° 56′ 50″.

260. O. 81*. Unter welcher geogr. Breite geht ein Stern, dessen Dekl. — 22° 14′ beträgt, 8 Stunden nach seinem Aufgang wieder unter? Die Strahlenbrechung ist mit 33′ in Rechnung zu ziehen. Aufl. 50° 39′ 10″.

261. O. 96. Ein Stern hat eine Dekl. von 24°. Während er eine Höhe von 34° erreicht, beträgt sein westl. Azimut 84°. Wie groß ist die geogr. Br. des Beobachtungsorts? Aufl. 54° 45′ 47″.

262. M. 99* Unter welcher geogr. Br. hat ein Stern (Dekl. 17°) bei einer Höhe von 38° einen westl. Azimut von 62° 2′ 4″? Aufl. 55°.

263. O. 92. Ein Stern, dessen Dekl. 12° ist, hat bei einer Höhe von 36° einen westl. Azimut von 24°. Wie groß ist die geogr. Breite des Beobachtungsorts? Aufl. 64° 13′ 27″.

264. O. 03. Bei einem Stern (Dekl. = 13° 13′ 3″) beobachtet man 4 Stunden nach seiner obern Kulm. einen westl. Azimut von 75°. Wie groß ist die geogr. Br. des Beobachtungsorts? Aufl. 50°.

265. O. 01. Ein Stern der nördl. Himmelshälfte hat $3^h\ 6^m\ 48^s$ nach seiner obern Kulm. eine Höhe von 38° und einen Azimut von 62° 2′ 3″. Wie groß ist die geographische Breite des Beobachtungsorts? Aufl. 1) 55° 0′ 15″; 2) — 6° 57′ 1″.

266. O. 94*. Welche Richtung hat der Schatten, den eine senkr. Stange in einer wagerechten Ebene wirft, unter 55° nördl. Br., wenn die Sonne die Dekl. 20° hat und erst 3 Stunden später in den Meridian des Ortes rückt? Aufl. 117° 39′ 0″ westl. Azimut.

267. M. 94*. Um wieviel Uhr vorm. (nach wahrer Sonnenzeit) hat der Schatten eines Turms in einer wagerechten Ebene einen westl. Azimut von 117° 39′ 0″, wenn die Dekl. der Sonne 20° u. die geogr. Br. 55° beträgt? Aufl. 9 Uhr.

268. O. 01*. Die geogr. Br. eines Orts beträgt 55°. Die Sonne hat eine Dekl. von 20°. Welchen westl. Azimut hat der Schatten eines Turms um 9 Uhr vorm. (nach wahrer Sonnenzeit), und wie lang ist der Schatten, wenn der Turm 30 m hoch ist? Aufl. 117° 39′ 0″; 34, 031 m. (34 m.)

269. O. 96*. Eine Sonnenuhr hat ein wagerechtes Zifferblatt; der Zeiger ist nach dem Weltpol gerichtet. Die geogr. Br. ist = 55°. 1) Wann hat der Schatten einen westl. Azimut von 140° 40′ 39″? 2) Welche Dekl. hat die Sonne, wenn gleichzeitig ihre Höhe = 41° 23′ 52″ ist? Aufl. 9 Uhr vorm; 20°.

270. O. 03*. Eine Sonnenuhr hat ein wagerechtes Zifferblatt. Der Zeiger ist nach dem Weltpol gerichtet. Die geogr. Br. beträgt 54°. Wohin fällt der Schatten des Zeigers um $4^1/_2$ Uhr nachm. (nach wahrer Sonnenzeit) u. wie hoch steht die Sonne, wenn ihre Dekl. 22° beträgt? Aufl. Östl. Azimut des Schattens: 117° 6′ 43″; Höhe der Sonne: 30° 46′ 23″.

III. Planimetrie.

271. M. 76. Dr. aus a, b, c : r.
272. O. 93*. Dr. aus γ, a : t_a, $\rho_c - \rho$.
273. M. 90. Dr. aus h_c, γ, c : ρ.

274. M. 90. Dr. aus $c : h_c$, δ, w_c.
275. O. 95. Dr. aus F, W. (a, t_c), W. (b, t_c).
276. O. 96*. Dr. aus F, W. (t_a, t_c), W. (t_b, t_c).
277. M. 82. Dr. aus ρ_a, $a^2 : b^2 : c^2 = p_1 : q_1 : r_1$.
278. O. 84. Dr. aus $\rho_a : \rho_b : \rho_c = 2 : 3 : 4$; $F = 40$ qcm.
279. O. 93. Dr. aus u, v, F.
280. M. 82*. Dr. aus $c : h_c = \sin 48^0 : \tan 30^0$;
$\gamma = 63^0$; $t_c = 7 \sqrt{\cos 18^0}$ cm.
281. O. 83. Dr. aus $a^2 : b^2 = \sin 18^0 : \tan 42^0$; $c = 8$ cm; $F = 5 \sqrt{2}$ qcm.
282. M. 98*. Dr. aus $c = 4$ cm, $h_c = 5$ cm, $a : t_a = 2 \sin 36^0 : \sin 78^0$.
283. M. 92. Dr. aus c, W. (c, t_c), $t_a : t_b$.
284. O. 92*. Dr. aus c, W. (a, t_a), $b : t_b$.
285. M. 99. Dr. aus γ, ρ, $ab = m^2$.
286. M. 99*. Dr. aus $a^2 + b^2$, F, γ.
287. M. 83. Dr. aus $\tan \alpha : \tan \beta = 3 : 4$; $\gamma = 72^0$; $F = 24 \sqrt{2}$ qcm.
288. O. 00*. Dr. aus $a + b - c = i$, γ, $\rho_a - \rho_b = k$.
Aufl. $\tan \varphi = i : k$; $\cos (\varphi + \frac{1}{2}\delta) = \cos \varphi . \sin \frac{1}{2}\gamma$.
289. M. 95. Dr. aus $a + b$, δ, h_a.
290. M. 86*. Dr. aus $a + b$, δ, $\rho_a : \rho_b$.
291. O. 91*. Dr. aus c, ρ_c, $\rho_a + \rho_b$.
292. M. 83. Dr. aus c, $a - b$, $\rho_c - \rho$.
293. M. 91. Dr. aus δ, $\rho + \rho_c$, $\rho_a - \rho_b$.
294. M. 79*. Dr. aus $\alpha - \beta$, $a - b$, $h_c + \rho_c$.
295. M. 85*. Dr. aus c, $\rho_a + \rho_b$, F.
296. O. 99. Dr. aus $a + b + c$, h_c, F.
297. M. 02. Dr. aus c, h_c, ρ.
298. M. 89*. Dr. aus $a + b$, ρ, F.
299. M. 84. Dr. aus $a + b$, ρ_c, F.
300. O. 98*. Dr. aus γ, ρ, F.
301. O. 85*. Dr. aus c, ρ_a, F.
302. M. 85. Dr. aus $a + b$, $\rho + \rho_c$, $\rho_a - \rho_b$.
303. M. 84. Dr. aus $a + b$; $\rho_a - \rho_b$; $h_a^2 : h_b^2 = i : k$.
304. M. 83*. Dr. aus $a + b$, $h_a + h_b$, h_c.
305. O. 94. Dr. aus c, δ, ρ_c.
306. M. 89. Dr. aus h_c, δ, $\rho_a + \rho_b$.
307. M. 98. Dr. aus $a + b$, h_c, $\rho_a + \rho_b$.
308. O. 90*. Dr. aus $a - b$, h_c, ρ.
309. M. 90*. Dr. aus h_c, δ, $\rho + \rho_c$.
310. O. 95. Dr. aus $a - b$, h_c, ρ.
311. O. 89. Dr. aus $a - b$, h_c, $\rho + \rho_c$.
312. M. 95*. Dr. aus γ, ρ, h_c.
313. O. 96. Dr. aus h_c, γ, $a + b - c$.
314. O. 97*. Dr. aus h_c, δ, ρ.

315. M. 86. Dr. aus h_c, ρ_c, δ.

316. O. 92. Dr. aus h_c, ρ, $\rho_a + \rho_b$.

317. M. 02. Dr. aus $a + b$, h_c, ρ.

318. M. 99. Dr. aus h_c, γ, $\rho_a \rho_b = m^2$.

319. O. 99. Dr. aus c, h_c, $\rho_a : \rho_b$.

320. M. 91*. Dr. aus c, h_c, $\rho : \rho_c$.

321. O. 86*. Dr. aus γ, h_c, $\rho_a - \rho_b$.

322. O. 02. Dr. aus $a + b$, ρ, ρ_c.

323. O. 01. Dr. aus $a - b = m$, ρ_a, ρ_b. Aufl. $c(\rho_a - \rho_b) = m(\rho_a + \rho_b)$.

324. M. 00. Dr. aus $a - b = m$, h_c, ρ_a. Aufl. $c(\rho_a - h) = m\rho_a$, u. s. w.

325. M. 00*. Dr. aus c, h_c, $\sqrt{\rho\rho_c} = m$. Aufl. $\rho\left(\rho + \frac{2m^2}{h}\right) = m^2$.

326. O. 03*. Dr. aus c, ρ_b, $2\rho_a - h_c = m$. Aufl. $h(h + m) = 2m\rho_b$.

327. M. 97*. Dr. aus γ, ρ_b, $h_c + \rho_a = m$. Aufl. $\rho_a(\rho_a + 3\rho_b - m) = m\rho_b$.

328. O. 90. Dr. aus c, $h_c + \rho = m$, ρ_c. Aufl. $h^2 + h(3\rho_c - m) = 2m\rho_c$.

329. M. 80*. Ein Dr. zz., wenn die Mitten einer Seite, des Umkr. u. des Feuerbachschen Kr. geg. sind.

330. M. 96. Ein Trapez zz, wenn die beiden Grundlinien, eine Diagonale und der Abstand des Diagonalenschnittp. von einer Grundl. geg. sind.

331. O. 92. Viereck aus a, b, e, f, $c : d$.

332. M. 95. Ein rg. Fünfeck zz., welches gleich der Summe zweier geg. gleichseitigen Dr. ist.

333. M. 02*. Ein rg. Achteck zz., welches gleich der Summe zweier geg. Dr. ist.

334. M. 80. Einen Kr. zz., dessen Fläche gleich dem harm. Mittel zweier geg. Kreisflächen ist.

335. M. 01*. Ein geg. Quadr. in ein rw. Dr. zu verwandeln, dessen Katheten einen geg. Unterschied d haben.

336. O. 91. In ein geg. Quadr. ein Rechteck von geg. Inhalt (m^2) zu beschr.

337. M. 96*. Ein rw. Dr. zz., wenn 1) die Summe (k) aus einer Kathete u. ihrer Projektion auf die Hypotenuse u. 2) die andere Kathetenprojektion (m) geg. ist.

Aufl. Die erste Proj. ist $k^2 : (m + 2k)$.

338. O. 86. In ein geg. Dr. ein Rechteck von geg. Inhalt zu beschr.

339. O. 93. Durch die Ecke D eines geg. Quadr. ABCD ($= a^2$) eine Gerade zz., daß, wenn BC in E und die Verlängerung von AB in F geschnitten wird, das Dr. BEF so groß wie das Quadr. wird. Aufl. $x(x - 2a) = 2a^2$; $BF = x$.

340. O. 91. Von einem Endp. des Durchm. eines geg. Kr. eine Sehne so zu ziehen, daß die Verlängerung der Sehne bis zu der durch den andern Endp. des Durchm. gezogenen Tangente gleich einer geg. Strecke wird.

341. M. 94*. In ein geg. Dr. ein Rechteck zu beschr., dessen Diag. eine geg. Länge m hat. Aufl. $x^2(c^2 + h^2) - 2c^2hx = h^2(m^2 - c^2)$; x ist die Höhe des Rechtecks.

342. O. 89*. Ein geg. Dr. durch eine zur Basis (c) parallel gezogene Gerade so zu teilen, daß der untere Teil den obern um eine geg. Fläche (m^2) übertrifft.

Aufl. Wenn der obere Teil der Höhe (h) x ist, so ist $x^2 = h\left(\frac{h}{2} - \frac{m^2}{c}\right)$.

343. M. 93. In ein geg. Dr. ein Rechteck so zu beschr., daß seine Grundl. auf derjenigen des Dr. liegt, u. die Höhe (h) des Dr. das Rechteck in 2 Teile teilt, deren Unterschied eine geg. Größe (m^2) hat. Aufl. $x(h - x) = hm^2 : (p - q)$. (x ist oberer Höhenabschnitt.)

344. O. 90. In ein geg. Quadr. ein gleichschenkl. Dr. so zu beschr., daß die Spitze in einer Ecke des Quadr. liegt und der Umfang gleich einer geg. Strecke 2s wird.

Det. $s > a\sqrt{2}$.

345. M. 92*. In einen geg. Kr. ein gleichschenkliges Dr. zu beschr., worin die Summe der Grundl. u. Höhe 3mal so lang wie der Halbm r wird. 2 Lös. sind anzugeben.

Aufl. Basis 1) $^6/_5$r; 2) 2r.

346. M. 92. In einem geg. Kr. werden 2 aufeinander senkr. Durchm. gezogen. Man soll eine Sehne ziehen, die durch diese Durchm. in 3 Teile so zerlegt wird, daß jeder äußere Abschnitt um eine geg. Strecke a kleiner als der mittlere wird.

Aufl. $10x^2 - 6ax = r^2 - a^2$; Halbm. r, Abstand der Sehne vom Mittelp. x.

347. M. 91. Von einem geg. P. an einen geg. Kr. eine Sekante so zu ziehen, daß der äußere Abschnitt um eine geg. Strecke m größer als die Hälfte des innern Abschnitts wird. Det. $a - r < m < a + 3r$. (Halbm. r, äußerer Abschnitt der Zentrale a.)

348. M. 77*. In einem Dr. ABC ist eine Ecktransversale $A\alpha$ nach der Gegenseite gezogen. Es sollen nach den anderen Seiten $B\beta$ u. $C\gamma$ so gezogen werden, daß sie sich auf $A\alpha$ schneiden u. $A\beta = A\gamma$ wird.

349. M. 86. 2 Strahlen bilden einen W. von 72^0. Ein dritter Strahl halbiert ihn. Zu diesem soll ein vierter, konjugierter so gezeichnet werden, daß das anharmonische Verh. $= -\sqrt{\sin 18^0}$ wird.

350. O. 78*. 2 Kr. zz., wenn ihre Mitten, der äußere Ähnlichkeitsp. u. die Potenzlinie geg. sind. Aufl. Wenn die Mitten der Kr. vom Ähnlichkp. um a u. b, von der Potenzl. um c u. d entf. sind, so ist das Quadr. des größern Halbm. $a^2(c^2 - d^2) : (a^2 - b^2)$.

351. O. 86. a, b, c, d sind geg. Strecken.

Es soll x aus $x^4 - ax^3 + bcx^2 - ad^2x + d^4 = 0$ geom. gezeichnet werden.

352. O. 81*. Einen Kr. zz., der eine Parabel, wovon die Kurve gegeben ist, in einem geg. P. berührt u. einen geg. Kr. rw. schneidet.

353. O. 81. Von einer Parabel kennt man nur den Brennp. u. die Leitlinie. Um den Schnittpunkt der Achse und Leitl. ist ein Kr. mit geg. Halbm. beschrieben. Man soll die Schnittp. des Kr. u. der Parabel geom. zeichnen.*)

354. O. 99* Von der Parabel $y^2 = 2px$ sind die Leitlinie und der Brennp. gegeben. Einen Parabelp. so zz., daß seine Normale gleich der Subtangente wird.

Aufl. Abszisse $= \frac{1}{4}(p + p\sqrt{5})$.

355. O. 01*. a, b u. c sind geg. Strecken. Es soll der Parameter 2p der Parabel $y^2 = 2px$, welche die Gerade $ax - by + c^2 = 0$ berührt, gezeichnet und berechnet werden. Aufl. $p = 2ac^2 : b^2$.

---

*) Bei dieser und den folgenden Konstruktionsaufgaben darf die Kurve der Kegelschnitte nicht zur Konstruktion benutzt werden.

356. O. 94*. Von einer Parabel kennt man die Leitlinie und (im Abstande p davon) den Brennp. der Lage nach. Ein gleichschenkl. Dr. zz., dessen Spitze im Brennp. liegt, dessen Basis eine Parabelsehne ist, und dessen Umfang eine geg. Länge m hat.

Aufl. Ordinate einer Basisecke $= - p + \sqrt{mp}$.

357. O. 89. Von einer Parabel kennt man die Leitlinie und den Brennpunkt. Eine Tangente an die Parabel zz., so daß ihre Länge vom Berührungsp. bis zur Parabelachse gleich einer geg. Strecke (m) wird. Aufl. $\xi (\xi + {}^1/_2 p) = {}^1/_4 m^2$.

358. O. 03. Die Schnittp. der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ und der Parabel $y^2 = 2px$ zz. (a, b, p sind geg. Strecken.)

359. O. 03. In eine durch ihre Achsen geg. Ellipse ein Rechteck mit geg. Umfang (4 m) zu beschr. Aufl. $\xi^2 (a^2 + b^2) - 2a^2m\xi + a^2 (m^2 - b^2) = 0$, u. s. w.

Det. $\sqrt{a^2 + b^2} > m > b$.

360. M. 93*. In eine Ellipse, deren Achsen der Lage u. Größe nach geg. sind, ein Rechteck zu beschr., dessen Diag. eine geg. Länge (2 m) hat. Aufl. Die Abszisse einer Ecke ist $a \sqrt{m^2 - b^2} : \sqrt{a^2 - b^2}$.

361. M. 89. Von einer Ellipse sind die Achsen der Lage und Größe nach gegeben. Ein gleichseitiges Dr. hineinzubeschr., so daß eine Ecke in einem Endp. der kleinen Achse liegt.

Aufl. Ein Endp. der Basis hat die Abszisse $2a^2b \sqrt{3} : (3a^2 + b^2)$.

362. O. 87*. Von einer Ellipse weiß man, daß sie durch die Ecken eines geg. Rechtecks geht und daß ihre Hauptachsen sich wie 2 : 1 verhalten. Es sollen die durch die Ecken des Rechtecks gehenden Tangenten geom. gezeichnet werden. Aufl. Wenn eine Ecke $(\xi\eta)$ ist, so schneidet eine Tangente von der xAchse $\xi + \frac{4\eta^2}{\xi}$ ab.

363. O. 01. Um eine durch ihre Achsen geg. Ellipse einen Rhombus mit den W. 120° u. 60° zu beschr. Aufl. Die halbe größere Diag. ist entweder $\sqrt{a^2 + 3b^2}$ oder $\sqrt{3a^2 + b^2}$.

364. M. 93. Von einer Ellipse sind die Achsen der Lage u. Größe nach gegeben. Von einem P. aus, der auf Verlängerung der großen Achse geg. ist, eine Tangente zz.

365. O. 95*. Um eine Ellipse, deren Achsen nach Lage u. Größe geg. sind, einen Rhombus zu beschr., der so groß ist wie das umbeschr. Rechteck.

Aufl. Die halben Diag. sind $a \sqrt{2}$ u. $b \sqrt{2}$.

366. O. 85. Um eine Ellipse, wovon nur die Achsen der Lage und Größe nach geg. sind, einen Rhombus zu beschr., dessen Diag. sich wie p : q verh. Aufl. Die halben Diag. sind $\sqrt{a^2q^2 + b^2p^2} : q$ u. $\sqrt{a^2q^2 + b^2p^2} : p$. (Auch rein geom.)

367. O. 00. Um eine Ellipse, von welcher die Achsen nach Lage und Größe geg. sind, ein gleichschenkl. Dr. zu beschr., dessen Grundl. so groß wie die Höhe ist u. der kleinen Achse parallel geht. Aufl. Die Entf. der Spitze vom Mittelp. ist $= \sqrt{a^2 + 4b^2}$.

368. O. 97. An eine durch ihre Achsen geg. Ellipse eine Tangente zz., deren Abstand vom Mittelp. eine geg. Länge p hat. Aufl. Die von der Tang. auf den Achsen gebildeten Abschnitte sind $cp : \sqrt{p^2 - b^2}$ u. $cp : \sqrt{a^2 - p^2}$.

369. O. 96. Um ein geg. Rechteck denke man sich eine Ellipse beschrieben. Die eine Halbachse (a) ist gegeben. Es soll die andre Halbachse und eine Tangente gezeichnet werden, die durch eine Ecke des Rechtecks geht. Aufl. Wenn eine Ecke (i, k) ist, u. wenn die Tangente von der xAchse u abschneidet, so ist $b = ak : \sqrt{a^2 - i^2}$ u. $u = a^2 : i$.

370. M. 78. Es sind 2 P. u. eine Gerade gegeben. Man soll, ohne die P. zu verbinden, den Schnittp. der Verbindungsl. u. der geg. Geraden durch Linearkonstr. finden.

371. M. 79. Von einem Dr. sind die 3 Seiten u. die Mitten zweier Seiten ihrer Lage nach gegeben, die 3 Ecken aber unzugänglich. Es soll die Mitte der dritten Seite durch Linearkonstr. gefunden werden.

372. O. 80*. Von einem Tangentenviereck sind die 4 Seiten ihrer Lage nach gegeben. Die Endp. einer Seite sind zugänglich, die der Gegenseite aber nicht. Von den auf diesen beiden Seiten liegenden Berührungsp. ist der eine bekannt. Es soll der andere durch Linearkonstr. gefunden werden.

373. O. 79. 2 Kr. u. eine Gerade sind gegeben. Einen P. so zz., daß seine konjugierten Pole auf jener Geraden liegen.

374. O. 79*. Durch die Endp. einer Dreieckseite einen Kr. zz., so daß die Polare der Gegenecke durch einen geg. P. jener Seite geht.

375. O. 77. 3 Strahlen sind ihrer Lage nach gegeben. Einen Kr. zz., der von dem einen ein Stück von geg. Länge abschneidet und die beiden anderen berührt.

376. O. 87. Einen Kr. zz., welcher 2 geg. Kr. berührt, und dessen Mittelp. auf einer geg. Geraden liegt.

377. M. 78*. Einen Kr. zz., der durch einen geg. P. geht, einen geg. Kr. berührt u. einen zweiten geg. Kr. so schneidet, daß die gemeinsame Sehne durch einen geg. P. geht.

378. M. 81. 2 Kr. K u. K_1, die sich nicht schneiden, sind gegeben, ferner zwischen ihnen 2 Gerade L u. L_1, die auf der Zentrale senkr. stehen. Einen dritten Kr. zz., der sowohl mit K u. L, als auch mit K_1 u. L_1 einen Büschel bildet.

379. M. 81*. Aus einem durch 2 Kr. geg. Kreisbüschel denjenigen Kr. zz., welcher einen geg. Kr. rw. schneidet.

380. O. 83*. Aus einem durch 2 Nullkr. geg. Kreisbüschel denjenigen Kr. zz., welcher einen geg. Kr. unter einer Sehne von geg. Länge schneidet.

381. M. 75*. Einen Kr. zz., welcher 2 geg. Kr. rw. schneidet und mit einem dritten geg. Kr. eine Sehne von geg. Länge gemeinsam hat.

382. O. 78. Einen Kr. zz., der durch einen geg. P. geht u. mit einem geg. Kr. eine Sehne von geg. Länge gemeinsam hat. Außerdem soll der Mittelp. auf einer geg. Geraden liegen.

383. O. 85. Aus einem durch einen Kr. u. eine ihn schneidende Gerade geg. Kreisbüschel einen Kr. zz., der von einem geg. P. aus unter 60° erscheint.

384. O. 80. 2 Kr. zz., welche beide 2 geg. Gerade berühren und mit einem geg. dritten Kr. ein geg. Potenzzentrum besitzen.

385. O. 83. Mit einem Halbm. von geg. Länge einen Kr. zz., der 3 geg. Kr. unter gleichen W. schneidet.

386. O. 82. Einen Kr. zz., welcher 3 geg. Kr. unter gleichen W. schneidet u. einen vierten geg. Kr. berührt.

387. M. 84*. Einen Kr. zz., der eine geg. Gerade u. 2 geg. Kr. unter gleichen W. schneidet u. durch einen geg. P. geht.

388. O. 84. Von einem durch 2 Kr. geg. Büschel denjenigen Kr. zz., welcher einen geg. Kr. unter 144° schneidet.

389. O. 84*. Einen Kr. zz., welcher eine geg. Gerade berührt u. 2 geg. Kr. unter 120^0 schneidet.

390. O. 82*. Einen Kr. zz., der 2 geg. Kr. K_1 u. K_2 berührt u. einen dritten geg. Kr. K_3 unter 126^0 schneidet.

($r_1 = 15$; $r_2 = 36$; $r_3 = 19$; $K_1 K_2 = 73$; $K_2 K_3 = 80$; $K_1 K_3 = 85$; mm!)

IV. Stereometrie.

391. M. 75*. Die Mitten der Seitenfl. eines Würfels (Kante a) bilden die Ecken eines rg. Okt. Die Mitten der Seitenfl. dieses Okt. bilden die Ecken eines zweiten Würfels, u. s. f. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller Würfel? Aufl. $\frac{27 a^3}{26}$.

392. M. 89. In eine Kugel (Halbm. r) wird ein rg. Okt. beschr., in dieses wieder eine Kugel, u. s. f. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller Kugeln und die aller Okt.? Aufl. $\Sigma K = {}^2/_{13} r^3 \pi \ (9 + \sqrt{3})$; $\Sigma O = {}^2/_{13} r^3 \ (9 + \sqrt{3})$; $\Sigma O = \frac{\Sigma K}{\pi}$.

393. O. 01. In eine Kugel (Halbm. r) wird ein rg. Okt., in dieses eine Kugel, in diese Kugel ein Würfel, in den Würfel eine Kugel, in diese Kugel wieder ein Okt. beschr., u. s. f. ohne Ende, so daß Okt. und Würfel abwechseln, zwischen 2 aufeinander folgenden Polyedern aber immer eine Kugel liegt. Wie groß ist die Summe aller Würfel? Aufl. ${}^4/_{13} r^3$.

394. O. 90*. In eine Kugel (Halbm. r) wird ein rg. Tetr. beschr., in dieses ein Okt., dessen Ecken in den Mitten der Tetraederk. liegen, in das Okt. ein Würfel, dessen Ecken in den Mitten der Oktaederfl. liegen, in den Würfel eine Kugel, darin wieder auf die angegebene Art ein Tetr., ein Okt., ein Würfel, eine Kugel, u. s. f. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller Kugeln? Aufl. $\frac{54 r^3 \pi}{9841} \cdot (243 + \sqrt{3}) = {}^4/_3 r^3 \pi.\ 1{,}007\ 179$

395. O. 89. In einen Cyl. mit quadratischem Achsenschnitt wird ein rg. Okt. beschr., in dieses ein dem vorigen ähnlicher Cyl., u. s. f. ohne Ende. (Alle Cylinderachsen und je eine Achse aller Okt. liegen in derselben Geraden.) Wie verh. sich die Summe aller Okt. zum ersten Cyl.? Aufl. $(8 + 5\sqrt{2}) : 21\pi = 1 : 4,\ 3775$.*)

396. O. 93. In eine vierseitige rg. Pyr., deren Kanten alle = a sind, wird eine Kugel beschr., in diese Kugel eine der vorigen ähnliche Pyr., in diese wieder eine Kugel, u. s. f. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller Pyr.?
Aufl. ${}^1/_{27} a^3 \ (3\sqrt{2} + \sqrt{6})$. (1,051 567 mal so groß wie die erste Pyr.)

397. O. 97*. In eine Kugel K (Halbm. r) wird eine rg. vierseitige Pyr. beschr., worin sich die Höhe zur Grundk. wie 2 : 3 verh. In die Pyr. wird eine Kugel beschr., in diese wieder eine ähnliche Pyr., u. s. f. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller Kugeln? Aufl. $\frac{19652\, r^3 \pi}{14091} = \frac{4913}{4697} K$.

398. O. 96. In eine Kugel (Halbm. r) wird ein rw. Ppp. beschr., dessen Kanten sich wie 4 : 4 : 7 verh., in das Prisma die größtmögliche Kugel, in diese wieder ein dem vorigen ähnliches Prisma, u. s. f. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller Prismen? Aufl. $128\, r^3 : 95$.

---

*) Hier und später wird unter einem Cylinder, falls nichts anderes bemerkt ist, stets ein gerader Kreiscylinder verstanden. Ebenso bedeutet „Kegel" stets einen geraden Kreiskegel.

399. O. 02. In eine Kugel (Halbm. r) wird ein Kegel beschr., dessen Seite und Grundr. sich wie 5 : 3 verh. In den Kegel wird die größte berührende Kugel beschr., in diese Kugel wieder ein ähnlicher Kegel, u. s. f. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller Kegelmäntel? Aufl. $960 r^2\pi : 481$.

400. M. 02. In eine Kugel wird ein Kegel beschr., dessen Seite u. Grundr. sich wie 5 : 3 verh. In den Kegel wird die größte berührende Kugel beschr., in diese Kugel wieder ein ähnlicher Kegel, u. s. f. ohne Ende. Die Summe aller Kegelmäntel ist $= \frac{3840\,\pi}{481}$. Wie groß ist der Halbm. der ersten Kugel? Aufl. 2.

401. O. 91*. In eine rg. dreiseitige Pyr., deren Seitenk. = 10 u. deren Grundk. = 15 sind, wird eine Kugel beschrieben, darüber eine zweite Kugel, welche die erste Kugel und die Seitenfl. berührt; darüber auf gleiche Art eine dritte, u. s. f. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller Kugeln? Aufl. $125\,\pi : 12$.

402. O. 02*. Ein rg. Okt. ist einem Cyl. so einbeschr., daß 2 Gegenecken in den Mitten der Grundkr. u. die anderen Ecken im Mantel liegen. In das Okt. wird ein dem vorigen ähnlicher Cyl. so beschr., daß die Grundkr. je 4 Oktaederfl. berühren. Wie verh. sich die Inhalte der Cyl. zu einander? Aufl. $(5\sqrt{2} + 7) : 1$.

403. M. 86. In eine rg. vierseitige Pyr. (Grundk. = a, Seitenk. = b) wird ein rw. Ppp. von halb so großer Höhe beschr., so daß seine obern Ecken in den Seitenk. der erstern liegen. Über der untern Basis des Prismas wird wieder eine rg. Pyr. beschr., deren Spitze in der obern Fläche des Prismas liegt, in die Pyr. ein Prisma wie vorher, u. s. f. ohne Ende. Wie groß ist die Summe aller Pyr. u. aller Prismen?

Aufl. $\frac{8}{21} a^2 \sqrt{b^2 - \frac{1}{2}a^2}$; $\frac{1}{7} a^2 \sqrt{b^2 - \frac{1}{2}a^2}$.

404. O. 81. Eine dreiseitige Pyr. wird von 4 kongr. Dr. eingeschlossen, deren Seiten = 5, 6 u. 7 sind. Den Inh. der Pyr. zu best. Aufl. $2\sqrt{95} = 19{,}4936$.

405. O. 83. Durch einen Würfel wird senkr. zu einer Raumdiag. ein sechseckiger ebener Schnitt gelegt. Eine Seite des Sechsecks ist gleich der Würfelkante a. Wie groß ist die Schnittfl.? Aufl. $\frac{1}{2} a^2 \sqrt{6}$.

406. O. 98. Durch einen Würfel (Kante a) läßt sich ein ebener Schnitt legen, der ein rg. Sechseck ist. Wie groß ist derjenige Schnitt, welcher jener Fläche parallel ist u. von ihr den Abstand $\frac{1}{12}$ a hat? Aufl. $\frac{35}{48} a^2 \sqrt{3}$.

407. M. 83*. In einen Würfel ist eine dreiseitige Pyr. einbeschr., so daß eine Ecke in einer Würfelecke, die andern drei in den Mitten der gegenüberliegenden Würfelfl. liegen. Wie verh. sich die Inh. der Kugeln, welche dem Würfel u. der Pyr. einbeschr. sind?

Aufl. $(81\sqrt{11} + 75\sqrt{3}) : 16 = 24{,}909 : 1$.

408. O. 93. In einen Würfel (Kante a) läßt sich ein rg. Tetr. so legen, daß alle 4 Tetraederecken in Würfelecken liegen. Durch die Tetraederfl. wird der Würfel in 5 Teile geteilt. Wie groß ist die Summe der in diese Teile beschr. Kugeln?

Aufl. $\frac{1}{18} a^3 \pi\,(24 - 13\sqrt{3})$. Die Innenkugel des Würfels ist 2,02246 mal so groß.

409. M. 85. Eine Kugel ist in einen Würfel (Kante a) so gelegt, daß sie 3 in einer Ecke zusammenstoßende Würfelfl. u. außerdem 3 Raumdiag. berührt. Oberfl. u. Inh. der Kugel zu best. Aufl. $\frac{8}{25} a^2\pi\,(11 - 4\sqrt{6})$; $\frac{8}{375} a^3\pi\,(68 - 27\sqrt{6})$.

410. O. 87. Über 2 Gegenfl. eines Würfels (Kante a) liegen Pyr. so, daß jedesmal die eine Würfelfl. die Basis und die Mitte der andern die Spitze einer Pyr. wird. In den

den beiden Pyr. gemeinsamen Körper wird eine Kugel beschr. Wie groß ist ihr Halbm.? Aufl. $\frac{1}{10} a \sqrt{5}$.

411. O. 90. Durch 3 Ecken eines Würfels, wovon nicht je zwei auf einer Kante liegen, und durch die Mitte des Würfels wird eine Kugelfl. gelegt. Wie groß ist die Kugelfl., wenn die Würfelk. a cm lang ist? Liegt die Mitte der Kugel innerhalb oder außerhalb des Würfels? Aufl. $\frac{27}{4} a^2\pi$; außerhalb, um ein Viertel der Raumdiagonale von der Würfelecke entfernt.

412. M. 02*. In einem Würfel (Kante a) liegt ein Cyl. so, daß seine Achse in einer Raumdiag. liegt, u. die Periph. der Grundkr. je 3 Würfelfl. berühren. Die Grundfl. des Cyl. verh. sich zum Mantel wie 1 : 3. Wie groß ist die Höhe des Cyl.?

Aufl. $\frac{3}{23} a (4\sqrt{6} - 3\sqrt{3}) = a \cdot 0,600\,236$.

(Grundr. $= \frac{1}{23} a (8\sqrt{6} - 6\sqrt{3}) = a \cdot 0,400\,157$).

413. M. 81. In ein rg. Tetr. (Kante a) wird ein Cyl. u. darüber eine die obere Cylinderfl. berührende Kugel einbeschr. Wie groß sind der Cyl. u. die Kugel, wenn beide gleichen Inh. haben? Aufl. $a^3\pi\sqrt{6} : 343$.

414. M. 89. In ein rg. Tetr. (Kante a) wird ein gerades dreiseitiges Prisma mit lauter gleichen Kanten so gestellt, daß seine obern Ecken in den Seitenk., die untern in der Basis des Tetr. liegen. Wie groß ist das Prisma? Aufl. $\frac{1}{2} a^3 (27\sqrt{2} - 22\sqrt{3})$.

415. M. 90*. In ein rg. Tetr. (Kante a) wird ein Cyl. so einbeschr., daß die untere Grundfl. des letztern in der Grundfl. des erstern liegt. Grundfl. u. Mantel des Cyl. verh. sich wie $1 : 8\sqrt{2}$. Wievielmal ist der Inh. des Cyl. in dem Inh. des Tetr. enthalten?

Aufl. $n = 27\sqrt{3} : 2\pi = 7,442\,94$.

416. O. 92*. Ein rg. Tetr. hat die Kante a. Ein Kegel wird so gelegt, daß seine Spitze in der Mitte der Tetraederbasis liegt, u. die Periph. des Grundkr. die Seitenk. schneidet. Der Mantel des Kegels ist 3mal so groß wie seine Grundfl. Wie groß ist der Inh. des Kegels?

Aufl. 1) $2a^3\pi\sqrt{6} : 729$; 2) wenn man die Seitenk. über die Spitze um sich selbst verlängert, so gelangt man zum Grundkr. eines zweiten Kegels (K_2), der auch der Aufgabe genügt. $K_2 = 27\,K_1$.

417. M. 85*. Eine Kugel berührt die Kanten (a) eines rg. Tetr. Wie groß ist der Halbm. einer Kugel, welche jene Kugel u. 3 Tetraederfl. berührt? Aufl. $\frac{1}{16} a (\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

418. M. 99. Den Halbm. der Kugel zu best., welche die Höhe, die Grundfl. und 2 Seitenfl. eines rg. Tetr. (Kante a) berührt. Aufl. $\frac{1}{21} a (2\sqrt{6} - \sqrt{3})$.

419. O. 85. Zu beweisen: Wenn in einem geschliffenen Glasokt. ein Lichtstrahl von einer Ecke nach der Mitte einer Gegenfl. geht, so kehrt er nach zweimaliger Zurückwerfung nach dem Ausgangsp. zurück.

420. M. 77. Nach welchem Verhältnis wird ein rg. Okt. durch einen ebenen Schnitt geteilt, der zu 2 Oktaederfl. parallel geht u. ihren Abstand nach 1 : 2 teilt? Aufl. 17 : 37.

421. M. 83. Durch ein rg. Okt. wird ein ebener Schnitt gelegt, der senkr. zu 2 Gegenk. liegt u. diese nach 1 : 2 teilt. Nach welchem Verh. wird der Inh. des ganzen Okt. durch den Schnitt geteilt? Aufl. 7 : 20.

422. O. 86*. Durch ein rg. Okt. (Kante a) wird ein ebener Schnitt gelegt, dessen Abstand von der Mitte des Okt. $\frac{1}{6} a$ beträgt und der auf 2 parallelen Kanten senkr. steht. Wie groß sind die entstehenden Teile des Okt.? Aufl. $7a^3\sqrt{2} : 81$ und $20a^3\sqrt{2} : 81$.

423. M. 94*. Durch ein rg. Okt. (Kante a) wird ein ebener Schnitt parallel zu 2 Gegenfl. gelegt. Die Größe der Schnittfl. ist $= {}^{11}/_{32}\, a^2 \sqrt{3}$. Wie groß sind ihre Seiten?
Aufl. Abwechselnd $^1/_4$ a u. $^3/_4$ a.

424. O. 03. Wenn man von 2 Gegenecken eines rg. Okt. die Flächenhöhen zieht, so entsteht eine rg. Doppelpyramide. Wie verh. sich die Inhalte der den beiden Körpern einbeschr. Kugeln zueinander? Aufl. $5 \sqrt{5} : 3 \sqrt{3}$.

425. O. 99. In ein rg. Okt. (Kante a) wird ein gerades vierkantiges Prisma so gelegt, daß alle seine Ecken auf Kanten des Okt. liegen. Die Gesamtoberfl. des Prismas ist $= {}^6/_{25}\, a^2 (3 + 4 \sqrt{2})$. Wie groß ist seine Grundkante?
Aufl. 1) $^3/_5$ a; 2) $^1/_{35}\, a\, (19 + 10 \sqrt{2}) =$ a. 0,946 918.

426. O. 86. In ein rg. Okt. (Kante a) wird ein rw. Ppp. so beschr., daß die Grundk. in 8 Oktaederfl. liegen. Die Grundk. verh. sich zu den Seitenk. wie $1 : 2 \sqrt{2}$. Wie groß ist das Prisma u. der hineinbeschr. Cyl.? Aufl. $^2/_{27}\, a^3 \sqrt{2}$; $^1/_{54}\, a^3 \pi \sqrt{2}$.

427. M. 99*. Die Grundkr. eines Cyl. gehen durch je 4 Kanten eines rg. Okt. (Kante a). Die Gesamtoberfl. des Cyl. ist $= {}^5/_9\, a^2 \pi$. Wie groß ist sein Mantel?
Aufl. $^4/_9\, a^2 \pi$.

428. M. 82*. In 2 Gegenecken eines rg. Okt., dessen Kante $= 1 + \sqrt{3}$ ist, werden Kugeln gelegt, die sich untereinander u. je 4 Seitenfl. berühren. Die Oberfl. der Kugeln haben die Summe $4^1/_2\, \pi$. Wie groß sind ihre Radien? Aufl. $^1/_4\, (2 \sqrt{2} \pm 1)$.

429. M. 91. Wie groß ist der Halbm. einer Kugelfl., die durch eine Ecke eines rg. Okt. (Kante a) u. durch die Mitten der in der Gegenecke zusammenstoßenden Kanten gelegt ist? Aufl. $^5/_{12}\, a \sqrt{2}$.

430. O. 95. In einem rg. Okt. (Kante a) liegt ein Pyramidenstumpf so, daß seine obern Ecken in den von einer Ecke, die untern in den von der Gegenecke ausgehenden Oktaederkanten liegen. Die Höhe des Pyrst. ist halb so groß wie die Oktaederachse, sein Inh. $= {}^7/_{54}\, a^3 \sqrt{2}$. Wie groß sind seine Grund- u. Seitenkanten? Aufl. $^1/_3$ a u. $^2/_3$ a; $^1/_3\, a \sqrt{5}$.

431. O. 03*. In einer rg. dreiseitigen Pyr. sind die Seitenk. = 20 a und die Höhe = 16 a. Durch die Ecken der Grundfl. und die Mitten der Seitenk. wird eine Kugelfl. gelegt. Wie lang sind die von der Spitze bis an die Kugelfl. gelegten Tangenten?
Aufl. $10\, a \sqrt{2}$.

432. M. 96*. Ein rg. Tetr. hat die Kante a. Ein Kegelstumpf liegt so, daß der untere Grundkr. die Grundk. berührt u. der obere die Seitenk. schneidet. Sein Inh. ist $= {}^1/_{108}\, a^3 \pi \sqrt{6}$; wie groß ist sein oberer Grundr.? Aufl. 1) $^1/_{12}\, a\, (\sqrt{15} + \sqrt{3})$; 2) 0; 3) $-\, ^1/_{12}\, a\, (\sqrt{15} - \sqrt{3}$; im dritten Falle besteht der Kegelst. aus 2 Scheitelkegeln. Der geg. Inh. ergiebt sich dann als Differenz aus dem Inh. der Teile.

433. O. 78*. Ein Kegel ist einer dreiseitigen Pyr. einbeschr. Ihre Grundk. sind = 170, 153 u. 289. Der Inhalt des Kegels ist = 18 158. Wie groß ist der Inhalt der Pyr.? Aufl. 52 019.

434. M. 84. In eine rg. dreiseitige Pyr., deren Seitenk. = a und deren Grundk. = b sind, ist eine Kugel beschr. Dann ist darüber eine zweite Kugel beschr., welche die erste Kugel u. die Seitenfl. berührt. Wie verh. sich die Radien dieser Kugeln?
Aufl. $\sqrt{12 a^2 - 3 b^2} - b : \sqrt{12 a^2 - 3 b^2} + b$.

435. M. 96. Eine rg. vierseitige Pyr. hat den Inhalt 3430. Die Höhe wird durch die Mitte der Umkugel nach 14 : 11 geteilt. Wie groß ist der Halbm. der Kugel? Aufl. 19,6

436. O. 00*. Durch eine Grundkante einer rg. vierseitigen Pyr., deren Kanten alle = a sind, wird ein ebener Schnitt so gelegt, daß die gegenüberliegenden Seitenk., von der Spitze aus gerechnet, nach 1 : 2 geteilt werden. Oberfl. u. Inh. der abgeschnittenen Pyr. zu ber. Aufl. $^2/_9\, a^2 (\sqrt{6} + 2\sqrt{3})$; $^1/_{27}\, a^3 \sqrt{2}$.

437. M. 78*. In einer rg. vierseitigen Doppelpyr. sind die Grundk. = a u. die Seitenk. = b. Die Kante des Würfels zu best., dessen Ecken auf den 8 Seitenk. jenes Körpers liegen. Aufl. $a\sqrt{4b^2 - 2a^2} : (a + \sqrt{4b^2 - 2a^2})$.

438. O. 95. Bei einer rg. vierseitigen Pyr. sind die Grundk. = 12 u. die Seitenk. = 11. Auf ihrer Grundfl. steht ein rg. vierkantiges Prisma so, daß seine obern Ecken in den von der Spitze ausgehenden Mittellinien der Seitenfl. liegen. Die Grund- und Seitenk. des Prismas verh. sich wie $\sqrt{2} : 1$. Wie groß ist die Raumdiag. des Prismas?
Aufl. $^{42}/_{13} \sqrt{5} = 7{,}224\,22$.

439. M. 86. Über einem Rechteck, dessen Seiten a u. b sind, steht eine Pyr., deren Höhe ihren Fußp. in der Mitte der Basis hat und gleich der Diag. der Basis ist. Durch die Spitze wird eine Ebene parallel zu einer Diag. so gelegt, daß von der Basis ein Drittel abgeschnitten wird. Wie groß ist die Schnittfl.? Aufl. $^1/_{12}\, (a^2 + b^2) \sqrt{34 - 4\sqrt{6}}$.

440. M. 00*. Die Grundfl. einer rg. fünfseitigen Pyramide ist = 84, jede Seitenfläche = 48. Welche Neigungsw. bilden die Seitenfl. und Seitenk. mit der Grundfl.?
Aufl. 69° 30′ 46″; 65° 12′ 39″.

441. O. 84*. Eine rg. fünfseitige Pyr. hat zu Seitenfl. Dreiecke, deren Basisw. 72° sind. Wie groß sind die W., welche je 2 benachbarte Seitenfl. miteinander und mit der Basis bilden? (ohne sphär. Trig.). Aufl. 116° 33′ 48″; 63° 26′ 5″.

442. O. 83. Bei einer rg. fünfseitigen Pyr. sind die Seitenk. gleich der Diag. der Basis. Durch eine Grundk. (a) ist ein ebener Schnitt senkr. zur gegenüberstehenden Seitenk. gelegt. Die Seiten der entstehenden Schnittfigur zu best.
Aufl. a und $a \cdot 1{,}40126 = {}^1/_4\, a (\sqrt{15} + \sqrt{3})$.

443. O. 91. In eine rg. fünfseitige Pyr., deren sämtliche Kanten = a sind, wird ein gerades fünfs. Prisma beschr., dessen Kanten auch alle unter sich gleich sind, und dessen obere Ecken in den Seitenk. der Pyr. liegen. Wie groß sind die Kanten des Prismas?
Aufl. $^1/_2\, a (-3 + \sqrt{5} + \sqrt{20 - 8\sqrt{5}}) = a.\ 0{,}344\,577$.

444. O. 80. In einer rg. fünfseitigen Pyr. verh. sich die Grundk. zu den Seitenk. wie sin 36° : 1. Wie verhält sich der Halbm. der Umkugel zur Höhe? Aufl. 2 : 3.

445. O. 99. Eine rg. fünfseitige Pyr. hat eine Grundfl. = 800; die Seitenk. sind = 36. Wie groß ist der Mantel eines Kegels, der dieselbe Höhe und denselben Inhalt hat?
Aufl. 1746,87.

446. M. 95. In einer rg. fünfseitigen Pyr. ist die Höhe gleich dem Durchm. des Umkreises der Grundfläche. Der Inh. der Pyr. ist = 120. Wie groß sind die Kanten?
Aufl. 4,9730; 9,4593.

447. O. 79. In eine rg. sechsseitige Pyr. wird ein rg. dreikantiges Prisma so gestellt, daß seine untere Grundfl. in der Grundfl. der Pyr. liegt und seine oberen Ecken in die Schwerp. dreier Seitenfl. fallen. Wie verh. sich die Inh. der beiden Körper zueinander?
Aufl. 1 : 6.

448. M. 82. Ein rg. Okt. aus Eisen (sp. G. = $7^3/_4$) ist ebenso schwer wie eine rg. sechsseitige Pyr. aus Holz (sp. G. = $^3/_4$), deren Grundk. = 7 cm und deren Seitenk. = 12 cm sind. Wie schwer ist das Okt. u. wie lang sind seine Kanten?

Aufl. 310,21 Gramm; 4,3953 cm.

449. M. 93. In einer rg. sechsseitigen Pyr. sind die Grundk. = a, die Seitenk. = b. Auf ihrer Grundfl. steht ein rg. sechsſ. Prisma so, daß seine obern Ecken in den Seitenk der Pyr. liegen. Alle Flächen des Prismas sind einander gleich. Wie groß ist sein Inh.?

Aufl. 1) $^{54}/_{125}\,a^3$; 2) 0.

450. M. 95. Von 2 rg. sechsseitigen Pyr. liegt die eine in der andern so, daß die Grundecken der kleinern in den Seitenk. der größern und die Spitze der kleinern in der Grundfl. der andern sich befindet. Die Grundk. der größern u. die Seitenk. der kleinern sind = 3, die Seitenk. der größern = 5. Die Inhalte beider Körper zu vergleichen.

Aufl. 1) $P = 18\sqrt{3}$; $p = \frac{15876\sqrt{3}}{15625}$; $p : P = 882 : 15625$. 2) $p = 0$.

451. O. 78. Der Inhalt einer rg. sechsseitigen Pyr. (Seitenkante = 6) verh. sich zum Inhalt ihrer Umkugel wie $1 : \pi\sqrt{3}$. Wie groß ist die Grundkante?

Aufl. 1) 2,3696; 2) 4,4534; ($x_3 = -6{,}8229$.) (kubische Gleichung.)

452. M. 91. In eine rg. sechsseitige Pyr., deren Seitenk. 3mal so lang wie die Grundk. sind, läßt sich eine Kugel beschr., deren Halbm. = ρ ist. Wie lang sind die Kanten?

Aufl. Grundkante = $^1/_{12}\,\rho\,(\sqrt{210} + 3\sqrt{2})$.

453. O. 99*. Von einer rg. sechsseitigen Pyr. (Grundk. = 12) wird ein Stück durch einen parallel zur Basis gelegten Schnitt abgeschnitten. Die Höhe des entstehenden Pyramidenstumpfs ist = 8 u. sein Inhalt = $1456\sqrt{3}$. Wie groß ist die Umkugel der abgeschnittenen Pyr.? Aufl. $85^3 \cdot \pi : 48 = 40194{,}4$.

454. O. 94. In einem rg. sechsseitigen Prisma ist die Grundkante = a. Ein Kegelstumpf liegt so, daß sein unterer Grundkr. durch die untern Ecken des Prismas geht u. sein oberer Grundkr. die obern Grundk. des Pr. berührt. Die Seite des Kegelst. ist = $^1/_2\,a\sqrt{14}$. Wie groß ist der Inh. des Kegelst.? Aufl. $^1/_{24}\,a^3\pi\,(20 + 11\sqrt{3})$.

455. M. 89*. Um die Mitte eines Würfels (Kante a) wird eine Kugel mit dem Halbm. $^1/_4\,a\sqrt{10}$ beschr. Wie groß sind die Teile, worin die Würfelk. durch die Kugelfl. zerlegt werden? Aufl. $^1/_2\,a\sqrt{2}$ u. $^1/_4\,a\,(2 - \sqrt{2})$.

456. M. 93*. Bei einem Würfel (Kante a) wird eine Kugelfl. so gelegt, daß sie die untere Grundfl. berührt u. durch die 4 obern Ecken geht. Wie groß ist der Inh. des Stückes, welches eine Seitenfl. des Würfels von der Kugel abschneidet? Aufl. $^1/_{24}\,a^3\pi$.

457. O. 89. Durch die Mitte eines Würfels (Kante a) wird eine Kugelfl. gelegt, welche die Grundk. der Basis in je 3 gleiche Teile teilt. Wie groß ist der Halbm. der Kugel u. nach welchem Verh. wird der Kugelraum durch die Grundfl. geteilt? Aufl. $^{19}/_{36}\,a$; 3159 : 3700.

458. O. 92. In einen Würfel (Kante a) wird eine rg. dreiseitige Pyr. gelegt, deren Spitze in einer Ecke des Würfels, u. deren Grundecken in den Mitten der in der Gegenecke des Würfels zusammenstoßenden Kanten liegen. Wie groß sind die Teile, worin die Grundfl. der Pyr. die Umkugel der letztern teilt?

Aufl. $\frac{155a^3\pi\sqrt{3}}{432}$ u. $\frac{77a^3\pi\sqrt{3}}{13500}$. (Verh. = 19375 : 308.)

459. M. 91*. In einen Würfel (Kante a) wird ein rg. Okt. einbeschr. (so daß seine Ecken in den Mitten der Würfelfl. liegen). Wie groß sind die Abschnitte, worin eine Oktaederfl. die Umkugel des Würfels teilt? Aufl. $^{7}/_{54}\ a^3\pi\sqrt{3}$ u. $^{10}/_{27}\ a^3\pi\sqrt{3}$.

460. O. 85*. Um die Mitte eines rg. Okt. (Kante a) wird eine Kugel K beschr., deren Halbm. $^4/_9 a$ ist. Wie groß sind die über die Oktaederfl. hinausragenden Kugelabschnitte?
Aufl. $S = a^3\pi\,(512 - 207\sqrt{6}) : 8748$; $K = S \,.\, 206{,}634$.

461. O. 87. In einem rg. Okt. wird parallel zu einer Diagonalfl. ein ebener Schnitt durch die Mitte von 4 Kanten gelegt. Durch die Ecken der genannten beiden parallelen Flächen wird eine Kugelfl. gelegt. Wie verh. sich die zwischen den parall. Flächen liegende Kugelschicht zu der Umkugel des Okt.? Aufl. 1 : 4.

462. M. 98*. Bei einem rg. Okt. (Kante a) werden 4 von einer Ecke ausgehende Kanten halbiert. Durch die Mitten und die andern Endp. dieser Kanten wird eine Kugelfl. gelegt. Den Inh. der 2 Teile zu ber., worin die Kugel durch eine der Oktaederfl. geteilt wird. Aufl. $^1/_{48}\,a^3\pi\ (5\sqrt{10} \mp 6\sqrt{6})$; oder: $^1/_{432}\ a^3\pi\ (45\sqrt{10} \mp 22\sqrt{6})$.

463. M. 92*. Um die Mitte eines rg. Tetr. (Kante a) wird eine Kugel (Halbm. $^1/_4$ a) beschr. Wie groß sind die über die Tetraederfl. hinausragenden Kugelabschnitte.
Aufl. $^1/_{1728}\,a^3\pi\ (18 - 7\sqrt{6})$. Das Tetr. ist 75,943 mal so groß wie das Segment.

464. M. 86*. Um und in ein rg. Tetr. sind Kugeln beschr. und in die berührende Kugel ein Würfel. Nach welchem Verh. teilt eine Würfelfl. die Umkugel?
Aufl. $(81\sqrt{3} - 40) : (81\sqrt{3} + 40)$.

465. O. 89*. Die Basis eines Tetr. (Kante a) u. eine zu ihr parallel gelegte Ebene schneiden aus der Umkugel des Tetr. eine Schicht heraus, deren Inh $= 13 a^3\pi\sqrt{6} : 432$ ist. Welchen Abstand (x) hat der Schnitt von der Mitte des Tetr.?
Aufl. 1) $x_1 = 0$; 2) $x_2 = {}^3/_4 a\sqrt{2} > r$, also unbrauchbar.

466. O. 86. Ein rg. Tetr. wird von einer durch eine Grundk. (a) gelegten Ebene halbiert. Um eine so entstehende Hälfte wird eine Kugel beschr. Wie groß ist ihr Halbm. u. wie groß sind die Teile, worin die Kugel durch die Ebene der Tetraederbasis zerlegt wird?
Aufl. $^1/_8 a\sqrt{22}$; $a^3\pi \cdot (99\sqrt{22} \mp 49\sqrt{6}) : 3456$.

467. O. 95*. Eine rg. sechsseitige Pyr. hat eine Höhe = 8; ihre Grundk. sind = 4 Welchen Inh. haben die Teile, worin die Umkugel durch eine Seitenfl. geteilt wird?
Aufl. $250\pi\ (361 \mp 27\sqrt{57}) : 1083$.

468. M. 85. In eine Kugel (Halbm. r) ist ein Kegel beschr, dessen Grundr. $^4/_5$r ist. Parallel zu seiner Grundfl. ist durch die Kugel ein ebener Schnitt gelegt, der durch den Kegelmantel halbiert wird. Nach welchem Verh. teilt der Schnitt den Inh. des Kegels und denjenigen der Kugel? Aufl. 125 : 91; 20 : 7.

469. M. 93. In einen Cyl. (Grundr. = 5, Höhe = 12) wird ein Ppp. gestellt, so daß seine Ecken in den Periph. der Grundkr. liegen. Wie groß ist der Inh. des Prismas, wenn seine Gesamtoberfl. = 432 ist? Aufl. 576.

470. M. 96. In eine Kugel (Halbm. r) ist ein Cyl. beschr., dessen Gesamtoberfl. drei Viertel von der Kugelfl. beträgt. Wie groß ist der Grundr. des Cyl.?
Aufl. 1) $3r\sqrt{0{,}1}$; 2) $^1/_2 r\sqrt{2}$.

471. O.77*. Über derselben Basis stehen ein gerader und ein schiefer Kreiscylinder. Diese schneiden aus einer Ebene, die senkr. zur Achse des zweiten steht, Ellipsenflächen heraus, wovon

die eine doppelt so groß wie die andere ist. Welchen W. bilden die beiden Cylinderachsen miteinander? Aufl. 45^0.

472. M. 92. In eine Kugel (Halbm. r) wird ein Kegel beschr, dessen Mantel u. Grundfl. sich wie p : q verh. Wie groß ist die Höhe des Kegels? Aufl. $2r\,(p^2 - q^2) : p^2$.

473. M. 01*. Ein rg. Tetr. (Kante a) ist in einen Kegel so beschr., daß eine Ecke im Mittelp. des Grundkr., die übrigen Ecken im Mantel, u. zwar in gleichem Abstande von der Fläche des Grundkr. liegen. Der Grundr. ist r. Wie groß ist der Mantel des Kegels?

Aufl. $r^2 \pi \sqrt{9 r^4 + 4 a^3 r \sqrt{3} + 3 a^4} : (3 r^2 - a^2)$.

474. M. 97*. Ein Würfel (Kante a) liegt in einem Kegel so, daß die untern Ecken auf der Basis, die oberen im Mantel des Kegels liegen. Der Halbm. der Grundfl. u. die Höhe des Kegels verh. sich wie 3 : 5. Wie groß ist der Mantel des Kegels?

Aufl. $\frac{1}{150}\, a^2\, \pi \sqrt{34}\,(43 + 30\sqrt{2})$.

475. O. 97. Die Achse eines Kegels ist gleichzeitig der Durchm. einer Kugel. Wie groß ist der W. φ, welchen die Achse mit einer Seite des Kegels bildet, wenn der Mantel des Kegels durch die Oberfl. der Kugel gerade halbiert wird? Aufl. ($\cos^4 \varphi = \frac{1}{2}$;) $32^0\, 45'\, 54''$.

476. M. 83. Über der Basis eines Cyl. steht ein Kegel, dessen Spitze in der Mitte der oberen Kreisfl. liegt. Über der letztern ist eine Halbkugel nach innen beschrieben. Das Stück, das Kegel u. Halbkugel gemeinsam haben, ist der n^{te} Teil der Halbkugel. Wie verh. sich die Höhe zum Grundr. des Cyl.? Aufl. $(n - 1) : \sqrt{2n - 1}$.

477. O. 03. Um ein Rechteck ist ein Kr. beschr. Die Figur wird um eine Mittellinie des Rechtecks gedreht. Senkrecht zur Achse läßt sich ein ebener Schnitt so legen, daß der entstandene Cyl. u. der von den Diag. beschr. Doppelkegel durch ihre Mäntel die Fläche des Kugelschnitts in 3 gleiche Teile zerlegen. Wie verh. sich die Seiten des Rechtecks zueinander? Aufl. Das Rechteck muß ein Quadr. sein. Der Abstand des Mittelp. der Kugel von der Schnittebene ist gleich dem 4. Teile der Diagonale.

478. M. 95*. Wie hoch müßte man sich über den Erdboden erheben, um den 6. Teil der ganzen Erdoberfl. überschauen zu können, wenn die Erde eine vollkommene Kugel mit einem Halbm. von 6370 km wäre? Aufl. 3185 km.

479. M. 84. Wie muß man durch eine Kugel einen ebenen Schnitt legen, wenn das eine Kugelsegment 9mal so groß sein soll wie der in das andere Segment beschr. Kegel?

Aufl. Die Höhe des Kegels wird $= \frac{1}{2} R$.

480. M. 79. Über Quecksilber lagert eine 6 cm hohe Wasserschicht. Eine schwimmende Kugel (Halbm. = 5 cm) taucht 2 cm tief in das Quecksilber (sp. G. = 13,596) ein; wie groß ist ihr spez. Gew.? Aufl. 2,2060.

481. M. 75. In einen Würfel (Kante a) lassen sich 8 Kugeln so legen, daß jede 3 der übrigen u. je 3 Würfelfl. berührt. Wie groß sind diejenigen beiden berührenden Kugeln, von denen die eine um, die andere zwischen jene 8 Kugeln gelegt werden kann?

Aufl. $\frac{1}{24} a^3 \pi\,(3\sqrt{3} \pm 5)$.

482. M. 80. Eine Kugel hat den Inhalt $4500\,\pi$. Es werden um sie 6 unter sich gleiche Kugeln gelegt, wovon jede 4 der andern u. die erste berührt. Wie groß sind die 6 Kugeln und die berührende Kugel, welche sie umhüllt?

Aufl. $4500\,\pi\,(7 + 5\sqrt{2})$; $4500\,\pi\,(99 + 70\sqrt{2})$.

483. O. 81. Eine Kugel (Halbm. $r = 15$) ruht auf einer wager. Ebene. Um sie herum werden 9 gleiche Kugeln gelegt, wovon jede deren zwei, die große Kugel u. die Ebene berührt. Den Inh. u. die Oberfl. der 9 Kugeln zu ber.

Aufl. $64 r^2 \pi \sin^4 20^0 = 619{,}03$; ${}^{256}/_3 r^3 \pi \sin^6 20^0 = 1448{,}2$.

484. M. 90. Über der Hypotenuse eines rw. gleichsch. Dr. (Kathete a) wird nach außen ein Halbkr. beschr. Die ganze Figur wird um eine Kathete gedreht. Wie groß ist der vom Dr. u. dem Halbkr. beschr. Umdk.?

Aufl. ${}^1/_{12} a^3 \pi (3\pi + 8)$. (Gesamtoberfl. $= {}^1/_2 a^2 \pi \sqrt{2}(\pi + 2 + \sqrt{2})$.

485. O. 91. Die Fläche eines Halbkr. (Halbm. r) wird um eine Achse gedreht, die vom Mittelp. um a absteht u. mit dem Durchm. 30^0 bildet. Die Periph. u. die Achse liegen auf verschiedenen Seiten des Durchm. Wie groß ist der Inh. des entstehenden Umdk.?

Aufl. ${}^1/_3 r^2 \pi (3 a \pi + 2 r \sqrt{3})$. (Mantel $= 2 r \pi (a \pi + 2a + r \sqrt{3})$.)

486. M. 84*. Von einem P. ist an einen Kr. (Halbm. r) eine Tangente u. durch den Mittelp. eine Sekante gezogen, die mit jener den W. α bildet. Die ganze Figur dreht sich um die Tangente. Wie groß sind die Mäntel, welche die Periph. der beiden Halbkr. beschr.?

Aufl. $2 r^2 \pi (\pi \mp 2 \cos \alpha)$. (Inh. $= r^3 \pi (\pi \mp {}^4/_3 \cos \alpha)$.)

487. O. 84. In einem gleichsch. Dr. sind die Basisw. $= \alpha$ u. die Schenkel $= a$; über einem Schenkel als Radius ist nach außen ein Sektor beschr., dessen Zentriw. $= 2\beta$ ist u. dessen Bogen durch die Spitze geht. Die ganze Figur dreht sich um die Basis. Den Mantel des entstehenden Umk. mit u. ohne Benutzung der Guldinschen Regel zu best. ($\alpha + 2\beta < \pi$.)

Aufl. $2 a^2 \pi \sin(\alpha + \beta) \cdot (\cos\beta + 2 \sin\beta)$.

488. M. 76. Aus einem Quadr. (a^2) wird ein Halbkr. ausgeschnitten, der eine Seite des Quadr. zum Durchm. hat. Der Rest wird um die Gegenseite gedreht. Die krumme Oberfl. u. den Inh. des entstehenden Umdk. zu ber. Aufl. $a^2 \pi (\pi - 1)$; ${}^1/_{12} a^3 \pi (14 - 3\pi)$.

489. M. 76*. Wenn man in ein Quadr. einen Kr. beschr., 2 gegenüberl. Ecken des Quadr. längs der Periph. abschneidet u. dann die übrigbleibende Figur um die unverkürzte Diagonale (4a) dreht, so entsteht ein Doppelkegel mit abgerundeter Kante. Den Rauminhalt u. die Oberfl. des Umdk. zu best. Aufl. $4 a^3 \pi$; $6 a^2 \pi \sqrt{2}$.

490. O. 81*. In einem Quadrat werden um die Ecken mit der halben Seite (mit r) Quadranten beschrieben. Die Figur wird um eine Mittellinie des Quadrats gedreht. Es sollen Oberfl. u. Inh. des durch die Bogen bestimmten Umdk. ber. werden.

Aufl. $2 r^2 \pi (\pi - 2)$; ${}^1/_3 r^3 \pi (10 - 3\pi)$.

491. O. 90. In einem Quadr. (Seite 2a) beschr. man um die Ecken durch die Mitten der Seiten Viertelkreise. Die von den Quadranten umschlossene Fläche wird um eine Achse gedreht, die durch eine Ecke des Quadr. parallel zu einer Diag. gelegt ist. Die durch die einzelnen Quadranten beschr. Mantelteile des Umdk. zu best. Aufl. Innerer Teil $= 2 a^2 \pi \sqrt{2}$; äußerer Teil $= 2 a^2 \pi \sqrt{2} (\pi - 1)$; oberer oder unterer Teil $= a^2 \pi^2 \sqrt{2}$. (Inh. $= 2 a^3 \pi \sqrt{2} (4 - \pi)$.)

492. O. 79*. Eine senkr. Strecke ist 18 cm lang. Über dem oberen Drittel als Durchm. ist nach links ein Halbkr. u. über dem Rest nach rechts ein Quadrant beschr., so daß die Periph. ineinander laufen. Das Ganze dreht sich um eine links liegende Achse, die von jener Strecke 6 cm entfernt ist. Wie groß ist der glockenartige Mantel, welchen die Periph. beschr.? Der erforderliche Teil der Guldinschen Regel ist abzuleiten.

Aufl. $36\pi (3\pi + 7)$ qm. (Inhalt $= 54 \pi (34 + 7\pi)$ ccm.)

493. D. 83*. Über den Seiten (a) eines gleichs. Dr. werden nach außen Kreisbogen von 240° beschr. Die ganze Figur wird um eine Mittellinie des Dr. gedreht. Den Mantel des Umdk. zu best. Aufl. $2a^2\pi\,(1 + {}^2/_9\,\pi\sqrt{3})$.

494. D. 82. Zwei gleiche Kr. schneiden sich unter einer Sehne, die gleich ihrem Halbm. r ist. Um die Schnittp. werden mit den Durchm. Kreisbogen von 120° von einer Periph. bis zur andern geschlagen. Durch Drehung der Figur um die Zentrale entsteht ein eiförmiger Körper. Seinen Inh. zu best.

Aufl. ${}^1/_{12}\,r^3\pi\,(16 + 57\sqrt{3} - 16\,\pi) = r^3.\ 16{,}876$. Rotationsellipsoid mit denselben Achsen: ${}^3/_2\,r^3\pi\,(2 + \sqrt{3}) = r^3.\ 17{,}587$. (Mantel $= {}^2/_3\,r^2\pi\,(6 + 9\sqrt{3} - 2\,\pi)$.)

495. M. 92. In einen Kegel (Grundr. = 4, Höhe = 12) wird ein Cyl. beschr., dessen Gesamtoberfläche ein Maximum wird. Wie groß ist der Cyl.?

Aufl. $27\,\pi$. (Oberfl. $= 36\,\pi$.)

496. D. 00. In eine Kugel (Halbm. r) wird ein Kegel (Höhe h) beschr. Parallel zu seinem Grundkr. wird ein ebener Schnitt gelegt. Wie groß muß der Abstand (x) dieses Schnitts vom Scheitel sein, wenn der zwischen Kugelfl. u. Kegelmantel liegende ringförmige Teil des Schnitts möglichst groß ist? Aufl. ${}^1/_2 h$. (Ring $= {}^1/_2\,hr\pi$, also der 4. Teil der den Kegel umhüllenden Kugelkappe.) Man beachte den Fall $h = 2r$.

497. D. 93*. In eine Kugel (Halbm. r) soll eine rg. vierseitige Pyr. von möglichst großem Inh. beschr. werden. Wie groß ist dieser Inh.?

Aufl. ${}^{64}/_{81}\,r^3$. (Der Abstand des Kugelmittelp. von der Grundfl. ist $x = {}^1/_3 r$.)

498. M. 98. In ein rg. Okt. (Kante a) ein größtmögliches rw. Ppp. so zu legen, daß alle seine Ecken auf Oktaederkanten liegen. Aufl. Grundkante $\frac{2}{3}\,a$; Inh. ${}^4/_{27}\,a^3\sqrt{2}$.

499. D. 98*. In ein rg Tetr. soll ein größtmögliches dreikantiges Prisma so gestellt werden, daß 3 Ecken in der Grundfl. u. die andern 3 in den Seitenk. des Tetr. liegen. Wie groß ist das Prisma? Aufl. ${}^4/_9\,T$.

500. D. 00. In eine rg. sechsseitige Pyr. (Grundk. = a, Seitenk. 7 a) soll ein Prisma mit möglichst großer Oberfl. beschr. werden, so daß seine oberen Ecken in den Seitenk. der Pyr. liegen. Wie groß ist die Kante des Prismas? Aufl. ${}^4/_7\,a$. (Oberfl. $= {}^{48}/_7\,a^2\sqrt{3}$.)

501. M. 02. In eine Kugel (Halbm. r) wird ein möglichst großer Kegel so gelegt, daß seine Spitze von der Mitte der Kugel die Entf. a hat. Welchen Abstand haben die Mitten der Kugel u. des Grundkr. voneinander? Aufl. ${}^1/_3\,(\sqrt{a^2 + 3r^2} \mp a)$.

502. M. 81*. Ein Kegel hat die Seite s u. den Grundr. r. In der Grundfl. ist im Abstande x vom Mittelp. eine Sehne gezogen. Durch die Sehne wird ein Parabelschnitt gelegt. Von diesem ist der Parameter u. die Fläche zu best. (Wann ist die Fläche ein Maximum?)

Aufl. $2p = 2r\,(r - x) : s$; $S = 2s\,(r + x)\sqrt{r^2 - x^2} : 3r$;
für $x = {}^1/_2 r$ ist $S = {}^1/_2 rs\sqrt{3}$ ein Max.

503. M. 80*. Vom Anfangsp. rw. Raumkoordinaten sind nach den P. (5, 30, 6) u. (8, 12, 24) Seile gespannt. Die Spannung beträgt im ersten Seile 372 kg, im zweiten 252 kg. Die Mittelkraft der Spannungen und ihre Richtung zu best.

Aufl. 565,14 kg; $\alpha = 76^\circ\,29'\,34''$; $\beta = 34^\circ\,5'\,50''$; $\gamma = 59^\circ\,21'\,44''$.

504. D. 80*. Zwei rw. Ppp. haben eine Raumecke O gemeinsam. Die Kanten des einen sind = 4, 4 und 2, die des andern bezw. = 2, 3 und 6. In der Ecke O befindet sich eine Masse M, in den Gegenecken sind die Massen $m_1 = 36$ und $m_2 = 49$. Die Größe und Richtung aus den Anziehungskräften zu best., die nach dem Newtonschen Gesetz von M auf m_1 und m_2 wirken. Aufl. $f M \cdot 1{,}8772$ (f ist die Anz. zwischen m = 1 und m = 1 in der Entfernung 1); $\alpha = 59^0\ 30'\ 47''$; $\beta = 54^0\ 18'\ 24''$; $\gamma = 50^0\ 38'\ 27''$.

505. D. 82*. Im Anfangsp. rw. Raumkoord. befindet sich eine Masse M. In den P. (6, 10, 15), (12, 21, 28), (20, 36, 45) befinden sich die Massen $m_1 = 6859$, $m_2 = 50653$, $m_3 = 226981$. Welche Richtung hat die Resultante der Anziehungskr., die von m_1, m_2 u. m_3 auf M wirken?

Aufl. $\alpha = 71^0\ 2'\ 21''$; $\beta = 55^0\ 2'\ 53''$; $\gamma = 41^0\ 11'\ 50''$; (Größe = $f M \sqrt{13677}$.)

506. D. 87*. In einer Ecke eines Würfels (Kante a) liegt eine Masse M, in den Mitten der Kanten, die in der Gegenecke zusammenstoßen, liegen bezw. die Massen m_1, m_2, m_3. Wie groß ist die Resultante der Anziehungskräfte, die von m_1, m_2, m_3 auf M wirken, u. wie bestimmt man ihre Richtung?

Aufl. $\Pi = 4\, f M R : 27 a^2$; $\cos (\Pi, x) = (m_1 + 2 m_2 + 2 m_3) : R$; u. s. w.; $R^2 = 9\,(m_1{}^2 + m_2{}^2 + m_3{}^2) + 16\,(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)$.

507. M. 85. Die rw. Raumkoord. zweier P. A u. B sind x_1, y_1, z_1 u. x_2, y_2, z_2. Es soll bewiesen werden, daß $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ ist. Ferner soll der W. gefunden werden, unter welchem AB vom Anfangsp. aus erscheint.

Aufl. $$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} \cdot \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}.$$

G. A. Friedrich.